Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

А. М. ЛОПШИЦ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ФИГУР

*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА • 1956

КНИГИ
НИКИТИНА

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 20

А. М. ЛОПШИЦ

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ФИГУР

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1956

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 4

Введение 5

Глава I. **Измерение площади ориентированной фигуры** . 7

§ 1. Ориентированный треугольник 7
§ 2. Ориентированная площадь ориентированного треугольника 8
§ 3. Теорема сложения 12
§ 4. Строгое доказательство теоремы сложения 13
§ 5. Ориентированный многоугольник 16
§ 6. Площадь ориентированного многоугольника 18
§ 7. Несколько примеров и задач 19

Глава II. **Планиметр** 27

§ 1. Полярный планиметр 27
§ 2. Прямолинейный планиметр 30
§ 3. Элементарное перемещение рычага планиметра . . . 32
§ 4. Число оборотов счетного колеса при элементарном перемещении рычага 34
§ 5. Число оборотов счетного колеса при замкнутом перемещении рычага 36
§ 6. Вспомогательная геометрическая теорема 37
§ 7. Использование вспомогательной геометрической теоремы для теории планиметра 40

Глава III. **Вычисление площади многоугольника, заданного на местности** 44

§ 1. Постановка задачи 44
§ 2. Несколько определений и обозначений 45
§ 3. Вспомогательная теорема 47
§ 4. Формула для вычисления площади ориентированного многоугольника 49
§ 5. Вычисление ориентированных углов 51
§ 6. Вычисление углов между несмежными сторонами ориентированного многоугольника 53
§ 7. Тригонометрическая формула для вычисления площади ориентированного многоугольника 56
§ 8. Теоретическое использование формулы, выведенной для практических целей 58

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книжка познакомит читателя с понятием площади ориентированной фигуры и его применениями к теории планиметра и к выводу целесообразной формулы для вычисления площади участка, заданного на местности и ограниченного произвольной замкнутой ломаной линией. Понятие ориентированной площади может быть использовано, как в этом убедится читатель, и для решения задач школьной геометрии.

В основу книжки положен материал лекций, читанных мной школьникам старших классов.

А. Лопшиц

ВВЕДЕНИЕ

При изучении элементарной геометрии много внимания уделяется вопросу измерения площадей. Многочисленные теоремы, излагаемые в школьном курсе, представляют не только теоретический, чисто математический интерес, но имеют и большое практическое значение. Однако более полное изучение вопросов, возникающих в этой области геометрии, и более широкое их применение к задачам практического характера становятся возможными только после существенного расширения самого понятия площади. Понятие ориентированной площади (изучаемое в силу установившейся традиции только в курсах высшей математики) приносит в разнообразных геометрических вопросах большую пользу. Ее можно сравнить с той, которая возникает при изучении алгебры, когда привлекают к рассмотрению, помимо положительных чисел, используемых в арифметике, также и отрицательные числа.

Понятие ориентированной площади так естественно расширяет привычное для учащегося понятие площади, так элементарно по своему содержанию и так богато интересными следствиями, что возникает соблазн познакомить с ним учащегося средней школы, не дожидаясь того времени, когда он будет изучать высшую математику. Прибегая опять к уже сделанному сравнению, можно сказать, что это в той же мере доступно для учащихся старших классов средней школы, как доступно ознакомление с отрицательными числами для школьников младших классов, уже знакомых с арифметикой, но не знающих еще алгебры.

В первой главе этой небольшой книги читатель найдет изложение вопроса об измерении площади ориентированных фигур на плоскости. Такое измерение приводит, как это будет показано, в некоторых случаях к положительному

числу, а в некоторых — к отрицательному. Это число мы и будем называть *ориентированной площадью*. В этой же главе будут доказаны разнообразные теоремы, представляющие собой математически интересное расширение теорем, известных из элементарной геометрии.

Во второй главе эти теоремы будут использованы для объяснения принципа действия широко принятого в инженерной практике прибора, носящего название *планиметр*, с помощью которого практически измеряются площади фигур произвольной формы, заданные на чертеже.

В третьей главе понятие ориентированной площади будет использовано при выводе практически целесообразной формулы для вычисления площади фигур, расположенных на местности.

ГЛАВА I

ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДИ ОРИЕНТИРОВАННОЙ ФИГУРЫ

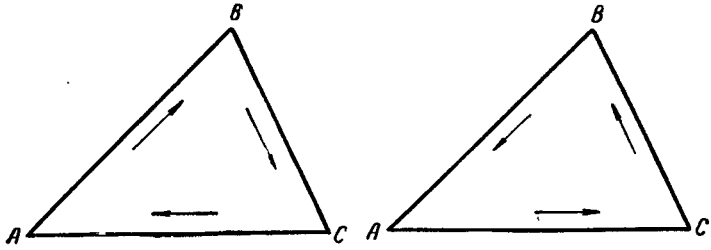
§ 1. Ориентированный треугольник

В элементарной геометрии треугольник считается полностью заданным, если указаны три точки, скажем A, B, C, являющиеся его вершинами. В этом случае принято говорить: задан треугольник ABC. С таким же успехом можно, конечно, сказать: задан треугольник BAC. Целесообразно, однако, несколько изменить наше представление о треугольнике и рассматривать его как траекторию движения по замкнутому пути, составленному из прямолинейных отрезков (сторон треугольника), соединяющих последовательно его вершины. С этой точки зрения задание треугольника потребует, помимо указания его вершин, еще и дополнительного указания последовательности, в которой они проходятся при рассматриваемом непрерывном замкнутом движении по сторонам треугольника. На чертеже это удобнее всего осуществить указанием направления движения на каждой стороне с помощью стрелки (достаточно, конечно, указать это направление на какой-нибудь одной стороне треугольника) (черт. 1), или, как принято говорить, указанием ориентации движения.

Чтобы отличить эту новую точку зрения на треугольник от прежней, мы будем говорить, что рассматриваем *ориентированный треугольник*. Таким образом, задание вершин A, B, C еще не определяет ориентированный треугольник: существуют, очевидно, два различных между собой ориентированных треугольника с одними и теми же вершинами A, B, C; один из них (черт. 1, *а*) ориентирован по часовой стрелке (такую ориентацию называют *левой ориентацией*), другой (черт. 1, *б*) ориентирован против часовой стрелки

(*правая ориентация*). Первый из этих ориентированных треугольников будем обозначать: треугольник *ABC* (или *BCA*, или *CAB*), второй будем обозначать: треугольник *BAC* (или *ACB*, или *CBA*).

Коротко говоря, ориентированный треугольник задается не просто тройкой вершин, а заданием упорядоченной тройки вершин, т. е. указанием не только вершин, но и порядка, в котором они сле-



а *б*

Черт. 1.

дуют; для обозначения ориентированного треугольника с вершинами в точках *A*, *B*, *C* мы условимся писать буквы, обозначающие его вершины, в том порядке, в котором эти вершины проходятся при непрерывном обходе по сторонам треугольника, соответствующем заданной его ориентации (правой или левой).

§ 2. Ориентированная площадь ориентированного треугольника

Определение. *Ориентированной площадью ориентированного треугольника ABC мы будем называть число, абсолютная величина которого равна площади треугольника (неориентированного) с вершинами A, B, C; ориентированную площадь мы будем считать положительным числом, если треугольник ориентирован против часовой стрелки, и отрицательным числом, если треугольник ориентирован по часовой стрелке.*

Если это определение неприятно удивило читателя, если оно даже показалось ему в какой-то мере противоречащим

привычной для него оценке площади (только с помощью положительного числа!), то прежде всего успокоим его напоминанием: речь сейчас идет не о площади обыкновенного треугольника, а о площади ориентированного треугольника. Поэтому мы ее и называем несколько по-новому — *ориентированная площадь*. Противоречия с привычным способом, следовательно, нет: положительным числом измеряют в элементарной геометрии площадь неориентированного треугольника.

Несколько более затруднительно убедить читателя в целесообразности данного определения. Полное понимание этой целесообразности возникнет только позже (и в особенности, после изучения материала главы II, в которой будет указано использование понятия ориентированной площади для теории планиметра — прибора для измерения площадей фигур, заданных на чертеже). Но уже и теперь мы имеем возможность показать, с какой пользой оно применяется в некоторых вопросах элементарной геометрии. С этой целью обратим внимание на следующие две теоремы.

Теорема 1. *Если вершину A треугольника ABC соединить отрезком с произвольной точкой A', лежащей внутри отрезка BC, то площадь исходного треугольника ABC будет равна сумме площадей возникших треугольников $A'BA$ и $A'AC$.*

Теорема 2. *Если вершину A треугольника ABC соединить отрезком с произвольной точкой A', лежащей на прямой BC и расположенной вне отрезка BC, то площадь исходного треугольника ABC будет равна разности площадей возникших треугольников $A'BA$ и $A'AC$.*

Доказательство обеих теорем настолько просто, что мы можем его здесь не приводить (черт. 2). Обещанное нами полезное применение понятия ориентированной площади [1]) заключается в том, что содержание этих двух «родственных» теорем исчерпывается следующей единой

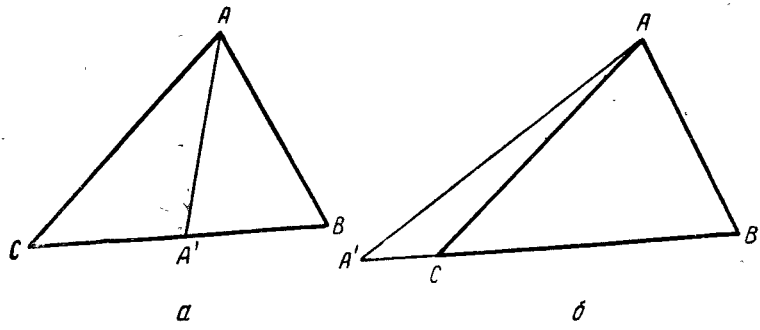
Теоремой 3. *Если вершину A треугольника ABC соединить отрезком с произвольной точкой A', лежащей на прямой BC и расположенной либо вне, либо внутри отрезка BC, то площадь ориентированного треугольника*

---

[1]) В дальнейшем изложении, когда новое понятие будет читателем освоено, мы будем без боязни говорить коротко *площадь ориентированного треугольника* вместо *ориентированная площадь ориентированного треугольника*.

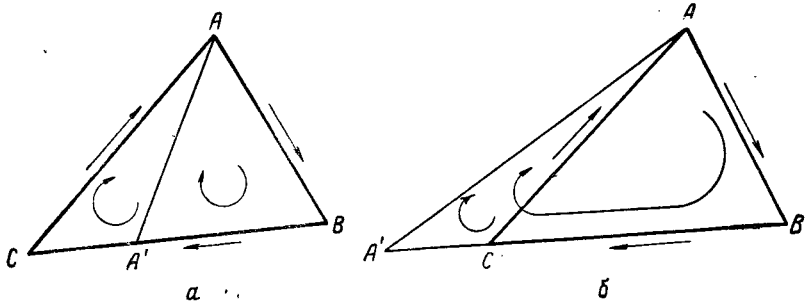
ABC будет равна сумме площадей ориентированных треугольников A′AB и A′CA.

При доказательстве этой теоремы читатель должен будет, конечно, рассмотреть по отдельности два возможных случая.



Черт. 2.

Первый (черт. 3, *а*) — когда точка A' расположена внутри отрезка BC и, следовательно, ориентированные треугольники ABC, $A'AB$, $A'CA$ ориентированы все три одинаково



Черт. 3.

и имеют поэтому ориентированную площадь одного и того же знака; в этом случае для доказательства теоремы 3 остается только использовать теорему 1.

Второй случай (черт. 3, *б*) — когда точка A' расположена на прямой BC вне отрезка BC и когда ориентированные треугольники $A'AB$ и $A'CA$ имеют разную ориентацию, а их ориентированные площади имеют поэтому разные знаки;

в этом случае для доказательства теоремы 3 придется использовать, конечно, теорему 2.

Замечание 1. Может показаться, что использование обеих теорем, 1 и 2, при доказательстве единой теоремы 3 делает ее в какой-то мере излишней. Основная ее ценность, однако, заключается именно в том, что она справедлива при любом расположении точки A' на прямой BC и поэтому может быть использована и тогда, когда мы не имеем точных сведений о том, находится ли точка A' внутри или вне отрезка BC. Использование этого обстоятельства часто существенно облегчает доказательство теорем, опирающихся на теорему 3. (См., например, доказательство теоремы 4 на стр. 15.)

Замечание 2. Справедлива ли теорема 3 при любом расположении точки A' на прямой BC? Увы, это утверждение нами еще не доказано! В самом деле, в условии уже доказанной теоремы 3 говорится только (и именно это использовано в доказательстве), что точка A' может лежать либо внутри, либо вне отрезка BC. Не рассмотренными, таким образом, случаями оказались те, когда точка A' совпадает с каким-либо из концов отрезка BC. Однако в этих случаях теорема 3 не имеет места по той причине, что упоминаемый в условии теоремы треугольник $A'AB$ (или треугольник $A'CA$) не существует; ведь в элементарной геометрии принято, что только различные три точки, притом еще и не лежащие на одной прямой, могут считаться вершинами треугольника.

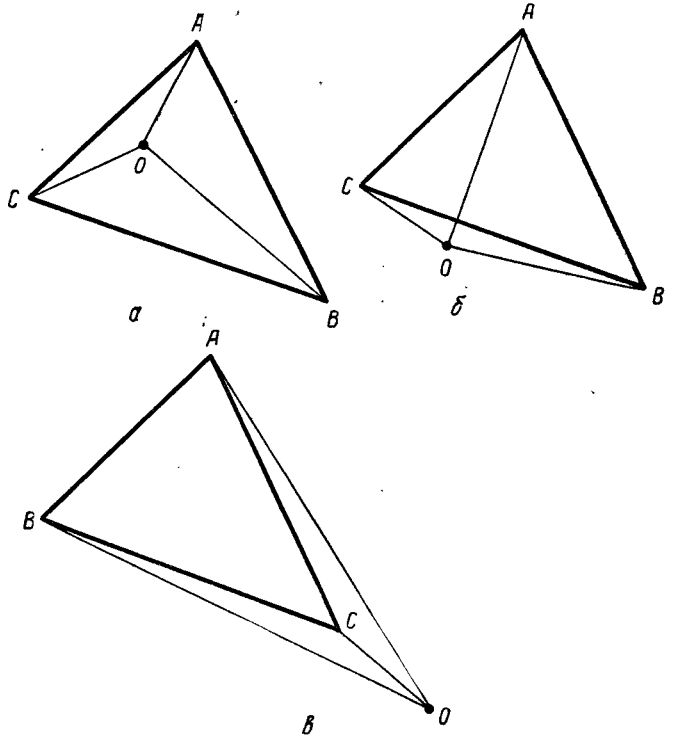
Целесообразно, однако, отказаться от такого определения. Будем в дальнейшем полагать, что *три произвольно расположенные точки A, B, C могут считаться вершинами треугольника*; его сторонами будут отрезки AB, BC, CA. Целесообразно также считать, что в том случае, когда вершины треугольника лежат на одной прямой, его площадь равна нулю; площадь треугольника будет, в частности, равна нулю и в том случае, когда две вершины треугольника (или даже все три) совпадают. При таком расширенном по сравнению с элементарной геометрией понимании того, что такое треугольник, можно утверждать (это без труда проверит читатель), что теорема 3 имеет место для любого расположения точки A' на прямой BC; таким образом, справедлива следующая, используемая в дальнейшем

Теорема 3′. *Если вершину A треугольника ABC соединить с произвольной точкой A', лежащей на прямой BC,*

то площадь ориентированного треугольника ABC будет равна сумме площадей ориентированных треугольников A′AB и A′CA.

§ 3. Теорема сложения

Пусть O — некоторая точка, расположенная внутри треугольника ABC. Соединив точку O с вершинами треугольника, легко обнаружим (черт. 4, *а*), что площадь треуголь-



Черт. 4.

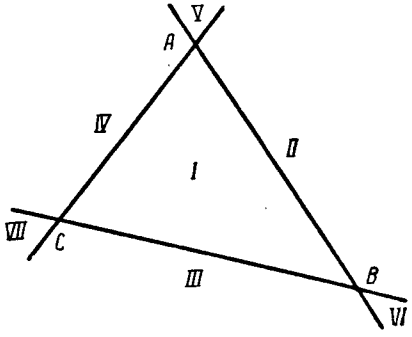
ника ABC равна сумме площадей трех треугольников: OAB, OBC, OCA. Остается ли справедливым это утверждение, если точка O расположена не внутри, а вне треугольника ABC? Стоит только бросить взгляд на чертеж 4, *б*, чтобы убедиться в противоположном: площадь треуголь-

ника ABC не равна сумме площадей треугольников OAB, OBC, OCA; она, очевидно, меньше этой суммы.

Читателя, несомненно, огорчило это обстоятельство! Трудно ли найти выход из создавшегося положения? Нельзя ли «сохранить» теорему? Внимательно вглядитесь в чертежи 4, *а*, *б*, *в*! Привлеките на помощь понятие ориентированной площади! Неужели у вас не возникло предположения, а может быть, даже уверенности, в справедливости следующей «единой»

Теорема 4 (теорема сложения). *Какова бы ни была точка O, лежащая в плоскости треугольника ABC, площадь ориентированного треугольника ABC*[1]) *равна сумме площадей ориентированных треугольников OAB, OBC, OCA.*

Для доказательства этой теоремы следует терпеливо рассмотреть, помимо случаев, изображенных на черт. 4, *а* и *б*, также и случай, когда точка O расположена относительно треугольника так, как это показано на черт. 4, *в*. Убедившись без особого труда, что в каждом из этих случаев теорема 4 справедлива, читатель придет к выводу, что она справедлива при любом расположении точки O относительно треугольника ABC: ведь точка O может быть расположена (черт. 5) только либо в области *I* (случай 4, *а*), либо в одной из областей *II*, *III*, *IV* (случай 4, *б*), либо, наконец, в одной из областей *V*, *VI*, *VII* (случай 4, *в*).



Черт. 5.

§ 4. Строгое доказательство теоремы сложения

Полностью ли удовлетворен читатель доказательством теоремы сложения, которое он провел, используя сделанные только что указания? Не заговорит ли в читателе протестующий голос логически рассуждающего геометра, полагающего, что доказанным следует считать только то, что

[1]) См. сноску на стр. 9.

выведено по правилам логики из условия теоремы (конечно, с помощью, если это оказывается полезным, уже ранее доказанных теорем).

В самом деле, если вдумчиво отнестись к «доказательству», которое проводится, скажем, для случая 4, *а*, то сразу станет ясно, что наряду с соображениями логического характера оно в значительной доле содержит утверждения, внушенные нам чертежом (это относится главным образом к утверждению об ориентации треугольников OAB, OBC, OCA, возникающих в случае 4, *б* и не возникающих в случае, например, 4, *в*). А ведь хорошо известно, что такого рода наглядные «правдоподобные» утверждения могут привести в некоторых случаях к «доказательству» неправильных положений [1]).

Указанные соображения побуждают нас дать строгое логическое доказательство теоремы сложения.

Изложение упростится, если воспользоваться специальным обозначением: ориентированную площадь ориентированного треугольника ABC условимся обозначать (ABC).

В силу этого условия имеют место, очевидно, следующие равенства:

$$(ABC) = (BCA) = (CAB), \tag{1}$$

$$(BAC) = (ACB) = (CBA), \tag{1'}$$

$$(ABC) = -(BAC). \tag{2}$$

Используя наше обозначение, мы можем записать условие теоремы 3′ в следующем виде:

Теорема 3′. *Для произвольной тройки точек: A, B, C и точки A', произвольно расположенной на прямой BC, имеет место равенство*

$$(ABC) = (A'AB) + (A'CA). \tag{3}$$

Укажем еще, наконец, и на то, что теорема 4, которую мы имеем в виду доказать, может быть теперь сформулирована следующим образом:

---

[1]) Этот вопрос — о роли чертежа в доказательстве геометрических теорем — подробно рассмотрен в книжке: Я. С. Дубнов, Ошибки в геометрических доказательствах, серия «Популярные лекции по математике», вып. 11, М., Гостехиздат, 1954.

Теорема 4. *Для произвольной тройки точек A, B, C и точки O, произвольно расположенной в плоскости ABC, имеет место равенство*

$$(ABC) = (OAB) + (OBC) + (OCA). \qquad (4)$$

Доказательство[1]).

Пусть A' — точка пересечения прямой OA с прямой BC[2]). Рассмотрим теперь тройку точек O, A, B и точку A', лежащую, как это было указано выше, на прямой OA. Используя теорему 3′ (формулу (3)), получим:

$$(OAB) = (A'AB) + (A'BO). \qquad (5а)$$

Используя эту же теорему для тройки точек O, B, C и точки A' (она лежит на прямой BC), получим:

$$(OBC) = (A'OB) + (A'CO). \qquad (5б)$$

Используя, наконец, все ту же теорему для тройки точек O, C, A и для точки A' (лежащей на прямой OA), получим:

$$(OCA) = (A'OC) + (A'CA). \qquad (5в)$$

Складывая почленно равенства (5а), (5б), (5в) и учитывая, что

$$(A'BO) + (A'OB) = 0 \quad \text{и} \quad (A'CO) + (A'OC) = 0,$$

получим:

$$(OAB) + (OBC) + (OCA) = (A'AB) + (A'CA). \qquad (6)$$

Приняв, наконец, во внимание, что в силу теоремы 3′

$$(A'AB) + (A'CA) = (ABC), \qquad (7)$$

так как точка A' лежит на прямой BC, и сопоставляя (6) и (7), получим (4), как и требовалось доказать.

---

[1]) Читатель, у которого не возник интерес к строгому доказательству теоремы сложения, может без ущерба для усвоения материала, который будет изложен в дальнейшем, пропустить окончание этого параграфа.

[2]) Если прямая OA параллельна прямой BC, но прямая OB не параллельна AC, то переименуем вершины треугольника: вершину B назовем A, а вершину A назовем B; если же прямая OA параллельна BC и прямая OB параллельна AC, то, очевидно, прямая OC не будет параллельна прямой AB; переименуем и теперь вершины треугольника: вершину C назовем A, а вершину A назовем C.

Замечание. Если читатель пользовался при доказательстве теоремы чертежом, хотя мы и не предложили этого сделать, то это, быть может, и помогло ему следить за ходом доказательства, но не сыграло никакой доказательной роли: в самом деле, все наши заключения следовали только из того, что точка A' лежит на прямой BC и на прямой OA, а это имеет место в силу «построения». Существенную роль в доказательстве сыграло использование (трижды) теоремы 3′, которая справедлива при любом расположении точки A' на прямой BC или OA (см. замечание 2 на стр. 11). Таким образом, наше доказательство можно считать «логически строгим» . . . , если только «логически строгим» является доказательство теоремы 3′. Не следует ли читателю вернуться к этой теореме и проверить строгость данного ей доказательства?

§ 5. Ориентированный многоугольник

Подобно тому как мы ввели (в § 1) понятие ориентированного треугольника, введем в рассмотрение и *ориентированный n-угольник, заданный упорядоченной совокупностью n точек* $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, A_n$, расположенных самым произвольным образом на плоскости. Такой многоугольник является изображением непрерывного движения по замкнутому пути, составленному из прямолинейных направленных отрезков, соединяющих последовательно

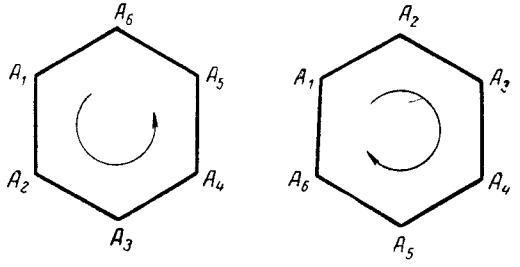
вершину A_1 с вершиной A_2
вершину A_2 с вершиной A_3
. . . . . .
вершину A_{n-1} с вершиной A_n
вершину A_n с вершиной A_1

«*Сторонами*» этого ориентированного многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ будут направленные отрезки

$$\overrightarrow{A_1A_2},\ \overrightarrow{A_2A_3},\ \ldots,\ \overrightarrow{A_{n-1}A_n},\ \overrightarrow{A_nA_1}.$$

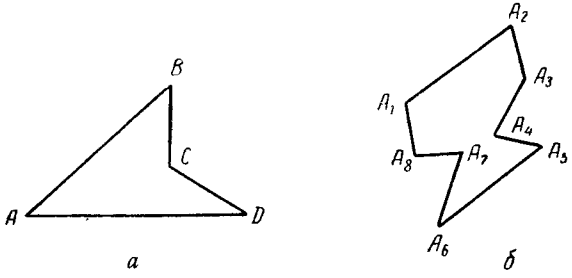
Стрелка, проставленная над направленным отрезком, должна нам напомнить, что движение вдоль него происходит в сторону от первой написанной точки («начало» направленного отрезка) ко второй точке («конец» направленного отрезка).

О выпуклом ориентированном многоугольнике мы будем говорить, что он *право-ориентирован*, если движение, им определяемое, происходит против часовой стрелки (черт. 6, *а*) и *лево-ориентирован*, если по часовой стрелке (черт. 6, *б*).



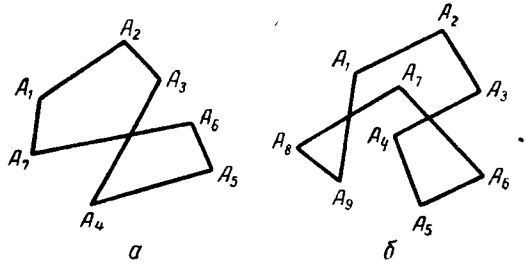
а *б*

Черт. 6.



а *б*

Черт. 7.



а *б*

Черт. 8.

Если же ориентированный многоугольник не выпуклый (черт. 7), то затруднительно приписать ему название «правый» или «левый». Особенно ясно это для ориентированного многоугольника, имеющего самоперссечения (черт. 8).

§ 6. Площадь ориентированного многоугольника

Площадь ориентированного выпуклого многоугольника условимся считать равной положительному числу, если многоугольник право-ориентированный, и отрицательному,—если многоугольник лево-ориентированный; абсолютная величина этого числа равна, естественно, площади неориентированного многоугольника с теми же вершинами, что и исходный ориентированный (измеренной по правилам элементарной геометрии).

А как измерить площадь ориентированного невыпуклого многоугольника? Какой знак приписать, например, площади многоугольника, изображенного на черт. 7, *а*? (Абсолютную величину этой площади естественно считать равной сумме площадей двух неориентированных треугольников ABC и ACD.)

Еще более сложным является вопрос об измерении площади «самопересекающегося» многоугольника: так, например, для многоугольников, изображенных на черт. 8, *а* или *б*, неясно не только то, какой знак приписать их площади, но неясно даже, какова абсолютная величина этих площадей.

Ответ на все эти вопросы подскажет нам следующая важная

Теорема 5. *Пусть* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — *упорядоченная совокупность n точек, произвольно расположенных на плоскости* (*эта совокупность определяет некоторый ориентированный n-угольник*). *Выбрав некоторую точку O, составим сумму*

$$S = (OA_1A_2) + (OA_2A_3) + \ldots + (OA_{n-1}A_n) + (OA_nA_1), \quad (8)$$

т. е. сумму площадей ориентированных треугольников, имеющих общей вершиной произвольно выбранную точку O, а основаниями — направленные стороны заданного ориентированного многоугольника. Тогда сумма S не зависит от положения точки O.

Доказательство. Пусть O' — некоторая другая произвольная точка. Нам предстоит доказать, что

$$(OA_1A_2) + (OA_2A_3) + \ldots + (OA_nA_1) = \\ = (O'A_1A_2) + (O'A_2A_3) + \ldots + (O'A_nA_1). \quad (9)$$

Используя теорему сложения, будем иметь:

$$(OA_1A_2) = (O'A_1A_2) + (O'A_2O) + (O'OA_1),$$
$$(OA_2A_3) = (O'A_2A_3) + (O'A_3O) + (O'OA_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(OA_iA_{i+1}) = (O'A_iA_{i+1}) + (O'A_{i+1}O) + (O'OA_i),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(OA_{n-1}A_n) = (O'A_{n-1}A_n) + (O'A_nO) + (O'OA_{n-1}),$$
$$(OA_nA_1) = (O'A_nA_1) + (O'A_1O) + (O'OA_n).$$

Складывая почленно эти равенства и выполнив очевидные сокращения, придем к равенству (9), которое и требовалось доказать.

Итак, в силу только что доказанной теоремы мы получим возможность каждому ориентированному многоугольнику $A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$ отнести число S, определяемое по формуле (8). Легко видеть, что в случае, когда многоугольник $A_1A_2 \ldots A_n$ выпуклый, это число равно ориентированной площади многоугольника. Естественно поэтому измерять площадь произвольного многоугольника числом S, определяемым формулой (8). Целесообразно обозначать эту площадь символом $(A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n)$.

Таким образом, согласно принятому нами определению,

$$(A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n) =$$
$$= (OA_1A_2) + (OA_2A_3) + \ldots + (OA_{n-1}A_n) + (OA_nA_1), \qquad (10)$$

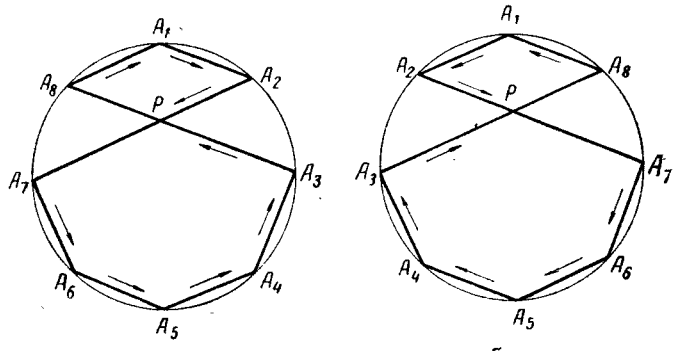
где O — произвольная точка на плоскости.

Замечание. Обратим внимание на то, что при $n = 3$ эта формула была нами доказана (см. § 3); при $n > 3$ она представляет собой целесообразное определение; возможность такого определения обеспечивается тем, что правая часть равенства (10), хотя и требует для своего вычисления некоторого конкретного выбора точки O, но не зависит от этого выбора — это и составляет содержание доказанной теоремы 5.

§ 7. Несколько примеров и задач

Пример 1. Пусть A_1, A_2, A_3, ..., A_7, A_8 — последовательные точки, делящие окружность радиуса R на восемь равных дуг. Вычислить площадь S ориентированного восьмиугольника $A_1A_2A_7A_6A_5A_4A_3A_8$ (черт. 9).

Р е ш е н и е. Для вычисления площади $(A_1A_2A_7A_6A_5A_4A_3A_8)$ по формуле (10) воспользуемся точкой O, являющейся центром окружности. Обозначив через s площадь ориентированного треугольника OA_1A_2 и через s' площадь ориентированного треугольника OA_2A_7, легко убедимся в том, что $(OA_7A_6)=-s$,



а б

Черт. 9.

$(OA_6A_5)=-s$, $(OA_5A_4)=-s$, $(OA_4A_3)=-s$, $(OA_3A_8)=s'$, $(OA_8A_1)=s$, и, следовательно,

$$S=(A_1A_2A_7A_6A_5A_4A_3A_8)=-2s+2s'.$$

Приняв, наконец, во внимание, что $|s|=|s'|=R^2\frac{\sqrt{2}}{4}$, получим $S=R^2\sqrt{2}$, если многоугольник $(A_1A_2A_3\ldots A_8)$ «левый» (черт. 9, *а*), если же он «правый», то $S=-R^2\sqrt{2}$ (черт. 9, *б*).

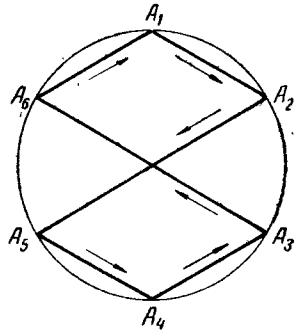
З а д а ч а 1. Обозначив через P точку пересечения хорд A_3A_8 и A_2A_7 (черт. 9), доказать, что

$$(A_1A_2A_7A_6A_5A_4A_3A_8)=(PA_8A_1A_2)+(PA_3A_4A_5A_6A_7).$$

З а д а ч а 2. Разность площадей неориентированных многоугольников $PA_3A_4A_5A_6A_7$ и $PA_8A_1A_2$ равна $R^2\sqrt{2}$ (черт. 9). Доказать!

Это предложение непосредственно вытекает из указанных выше двух результатов. Оно не содержит в себе никаких новых, с точки зрения школьной геометрии, понятий, но доказательство его, которое здесь намечено, существенно

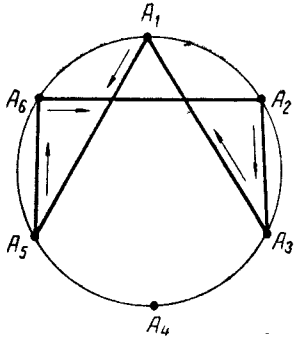
использует «новое» понятие: ориентированная площадь. Предложим читателю самостоятельно найти «школьное» доказательство предложения задачи 2. Трудности, которые при этом возникнут, помогут читателю лишний раз убедиться в целесообразности введения понятия ориентированной площади многоугольника, которое, как мы предполагаем, показалось читателю несколько искусственным.



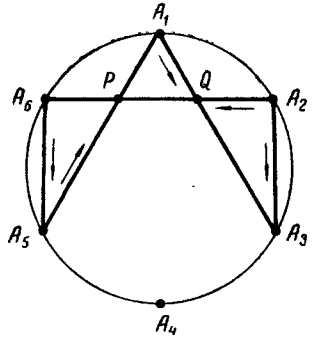
Черт. 10.

Задача 3. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 — последовательные точки, делящие окружность радиуса R на шесть равных дуг. Вычислить площадь S ориентированного шестиугольника $A_1A_2A_5A_4A_3A_6$ (черт. 10). Ответ: $S=0$.

Задача 4. Вычислить площадь S ориентированного пятиугольника $A_1A_5A_6A_2A_3$ (черт. 11). Ответ: $S=(OA_5A_6)=$ $=-R^2\frac{\sqrt{3}}{4}$, где O — центр описанной окружности.



Черт. 11.



Черт. 12.

Пример 2. Площадь S ориентированного пятиугольника $A_1A_3A_2A_6A_5$ (черт. 12) равна разности удвоенной площади неориентированного треугольника QA_2A_3 и площади неориентированного треугольника A_1PQ, где P и Q — точки пересечения хорды A_6A_2 с хордами A_1A_5 и A_1A_3 соответственно.

Решение. Воспользовавшись точкой Q для вычисления площади S по формуле (8), получим:

$$S = \{(QA_1A_3) + (QA_3A_2) + (QA_2A_6)\} + \{(QA_6A_5) + (QA_5A_1)\}$$

и, следовательно, $S = (QA_3A_2) + \{(QA_6A_5) + (QA_5A_1)\}$.

Учитывая, что в силу теоремы 2

$$\left.\begin{aligned}(QA_6A_5) &= (QPA_5) + (A_5PA_6),\\ (QA_5A_1) &= (QA_5P) + (QPA_1),\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

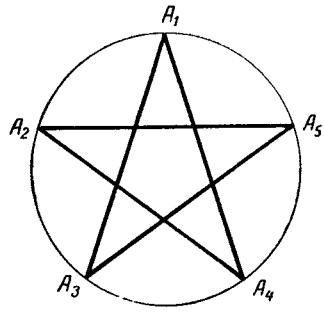
получим, выполнив очевидное сокращение:

$$S = (QA_3A_2) + (A_5PA_6) + (QPA_1).$$

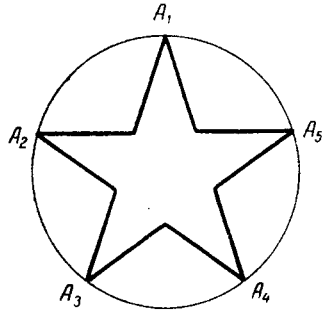
Приняв, наконец, во внимание, что неориентированные треугольники PA_6A_5 и QA_2A_3 имеют одинаковую площадь, и учитывая ориентацию треугольников, входящих в равенства (11), придем к заключению, которое требуется доказать.

Задача 5. Если в ориентированном многоугольнике имеется одно и только одно самопересечение (см., например, черт. 8, *а*), то его площадь равна разности двух неориентированных многоугольников, на которые исходный многоугольник распадается. Доказать!

Задача 5′. Сформулировать аналогичный результат для площади ориентированного многоугольника, имеющего больше чем одно самопересечение.



Черт. 13.

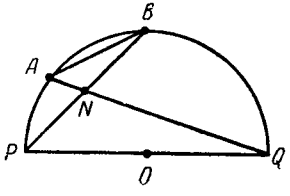


Черт. 14.

Задача 6. Точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 — последовательные точки, делящие окружность на пять равных дуг. Вычислить площадь ориентированного многоугольника $A_1A_3A_5A_2A_4$ (черт. 13). Ответ: $S = 5(OA_1A_3)$, где O — центр окружности.

Задача 7. Вычислить площадь S «пятиконечной звезды» (черт. 14). Ответ: $S = 5(OA_2A_3)$, где O — центр окружности, в которую вписана звезда.

Задача 8. Можно ли выбрать внутри дуги полуокружности (черт. 15) $PABQ$ две точки A и B так, чтобы площади неориентированных треугольников ABN и PQN были равны между собой (N — точка пересечения хорд PB и AQ)?



Черт. 15.

Ответ: Невозможно.

Решение. $(ABPQ) = (OAB) + (OBP) + (OQA)$; введя обозначения: $\alpha = \cup PA$, $\beta = \cup AB$, получим:

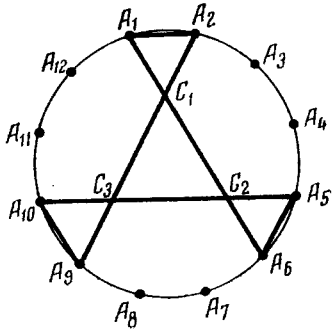
$$(ABPQ) = -\frac{\sin\beta}{2} + \frac{\sin(\alpha+\beta)}{2} + \frac{\sin(180-\alpha)}{2}.$$

Учитывая, что $(ABPQ) = (ABN) - (PQN)$, придем к выводу, что для равенства площадей треугольников ABN и PQN необходимо и достаточно, чтобы $\sin(\alpha+\beta) - \sin\beta = -\sin\alpha$, т. е. чтобы $2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right) = -2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, или $\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\frac{\alpha}{2} = 0$ (так как $\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0$!). Последнее равенство эквивалентно равенству $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2} = 0$, которое не может иметь места, так как $\alpha+\beta < 180°$.

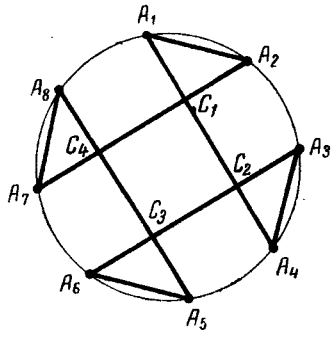
Замечание. Решение этой задачи может быть, конечно, получено и с помощью совсем элементарных геометрических рассуждений. Читателю, который найдет это решение, предложим решить следующую задачу, являющуюся естественным продолжением рассмотренной: можно ли выбрать внутри дуги полуокружности $PABQ$ две точки, A и B, так, чтобы площадь неориентированного треугольника PQN была равна площади неориентированного четырехугольника $NACB$, где C — середина дуги AB? Удастся ли в этом случае легко решить вопрос, используя только методы школьной геометрии?

Задача 9. Правильный двенадцатиугольник $A_1A_2 \ldots A_{12}$ вписан в окружность. Многоугольник $A_1A_6A_5A_{10}A_9A_2$ имеет три точки самопересечения C_1, C_2, C_3 (C_1 лежит на прямой A_1A_6, C_2 — на прямой A_5A_{10}). Доказать, что площадь треугольника $C_1C_2C_3$ в три раза больше, чем площадь треугольника $A_1A_2C_1$ (черт. 16).

Решение. $S=(A_1A_6A_5A_{10}A_9A_2)=3[(OA_1A_6)+(OA_2A_1)]=$ $=3\frac{R^2}{2}[\sin 150^\circ-\sin 30^\circ]=0$. Учитывая теперь, что $S=$ $=(C_1C_2C_3)+3(C_1A_2A_1)$, придем к выводу, что $(C_1C_2C_3)=$ $=3(A_1A_2C_1)$.

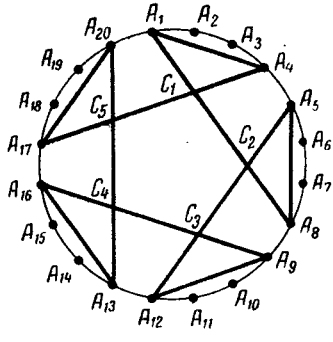


Черт. 16.



Черт. 17.

Задача 10. Правильный восьмиугольник $A_1A_2\ldots A_8$ вписан в окружность. Многоугольник $A_1A_4A_3A_6A_5A_8A_7A_2$ имеет четыре точки самопересечения C_1, C_2, C_3, C_4 (C_1 лежит на прямой A_1A_4, C_2 — на прямой A_3A_6). Доказать, что площадь квадрата $C_1C_2C_3C_4$ в четыре раза больше площади треугольника $A_1A_2C_1$ (черт. 17).



Черт. 18.

Задача 11. Правильный двадцатиугольник $A_1A_2\ldots A_{20}$ вписан в окружность. C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — пять точек самопересечения многоугольника $A_1A_8A_5A_{12}A_9A_{16}A_{13}A_{20}A_{17}A_4$ (C_1 лежит на прямой A_1A_8, C_3 — на прямой A_5A_{12}). Доказать, что площадь правильного пятиугольника $C_1C_2C_3C_4C_5$ в пять раз больше площади треугольника $A_1A_4C_1$ (черт. 18).

Читателю может показаться, что к задачам 9, 10, 11, имеющим родственное содержание, можно присоединить и дальнейшие родственные задачи, в которых речь будет идти о многоугольниках с шестью, семью, ... точками

самопересечения. Однако это не так: невозможность «продолжить» эти задачи станет для читателя очевидной, если он решит следующую задачу.

Задача 12. Окружность разделена на n равных дуг

$$\smile A_1A_2,\ \smile A_2A_3,\ \smile A_3A_4,\ \ldots,\ \smile A_{n-1}A_n,\ \smile A_nA_1.$$

Внутри каждой из них взяты точки

$$B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_n,$$

такие, что дуги

$$\smile A_1B_1,\ \smile A_2B_2,\ \ldots,\ \smile A_nB_n$$

равны между собой. Проведя хорды

$$A_1B_2,\ A_2B_3,\ \ldots,\ A_{n-1}B_n,\ A_nB_1,$$

а также хорды A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, получим замкнутый $2n$-угольник, имеющий n точек самопересечения

$$C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$$

(хорда A_1B_2 пересекает хорду B_1A_n в точке C_1, хорда A_2B_3 пересекает хорду B_2A_3 в точке C_2 и т. д.). Определить значение n, при котором площадь многоугольника $C_1C_2\ldots C_n$ в n раз больше площади треугольника $A_1B_1C_1$.

Ответ: $n=3,\ 4,\ 5$.

Решение. $S=(A_1B_2A_2B_3\ \ldots\ A_nB_1)=(C_1\ \ldots\ C_n)+n(C_1B_1A_1)$; поэтому площадь $(C_1\ \ldots\ C_n)$ будет в n раз больше площади $(C_1A_1B_1)$ в том и только в том случае, когда $S=0$. Учитывая теперь, что $S=n[(OA_1B_2)+(OB_2A_2)]$ (O — центр многоугольника $A_1A_2\ \ldots\ A_n$), получим:

$$\sin\left(\frac{360^\circ}{n}+\alpha\right)-\sin\alpha=0\quad(\alpha\equiv\smile A_1B_1),$$

и, следовательно,

$$\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\left(\frac{180^\circ}{n}+\alpha\right)=0.$$

Таким образом, мы убеждаемся в существовании только следующих трех решений:

n	3	4	5
$\smile A_1A_2$	120°	90°	72°
$\smile A_1B_1=\alpha$	30°	45°	54°

Задача 13. Если отрезки A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n имеют общую середину, то $(A_1A_2 \ldots A_n) = (B_1B_2 \ldots B_n)$. Доказать!

Указание. Вычислить площадь ориентированных многоугольников $A_1A_2 \ldots A_n$ и $B_1B_2 \ldots B_n$ по формуле (7), выбрав в качестве точки O середину отрезков A_iB_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Задача 14. Если ориентированный многоугольник $B_1B_2 \ldots B_n$ получен из ориентированного многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ путем параллельного переноса (т. е. если направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, ..., $\overrightarrow{A_nB_n}$ параллельны друг другу и имеют равные длины), то $(A_1 \ldots A_n) = (B_1 \ldots B_n)$.

Задача 15. Если ориентированные стороны $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_2A_3}$, ..., $\overrightarrow{A_nA_1}$ ориентированного многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ параллельны и равны соответственным сторонам $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{B_2B_3}$, ..., $\overrightarrow{B_nB_1}$ ориентированного многоугольника $B_1B_2 \ldots B_n$, то $(A_1A_2 \ldots A_n) = (B_1B_2 \ldots B_n)$.

В заключение посоветуем читателю самостоятельно придумать задачи, в решении которых используется понятие площади ориентированного многоугольника. Особенный интерес представляют на наш взгляд задачи, в условие которых входят только понятия школьной геометрии, но решение которых существенно упрощается в результате использования новой, изложенной выше, точки зрения на площадь (как, например, в задачах 2 и 7—12).

ГЛАВА II

ПЛАНИМЕТР

Для вычисления площадей фигур, изображенных на чертеже, применяют в инженерной практике различные механические приборы. В этой главе мы ознакомим читателя с устройством одного из простейших приборов такого рода; используя теорию измерения площадей ориентированных многоугольников, изложенную в первой главе, мы объясним принципы его действия.

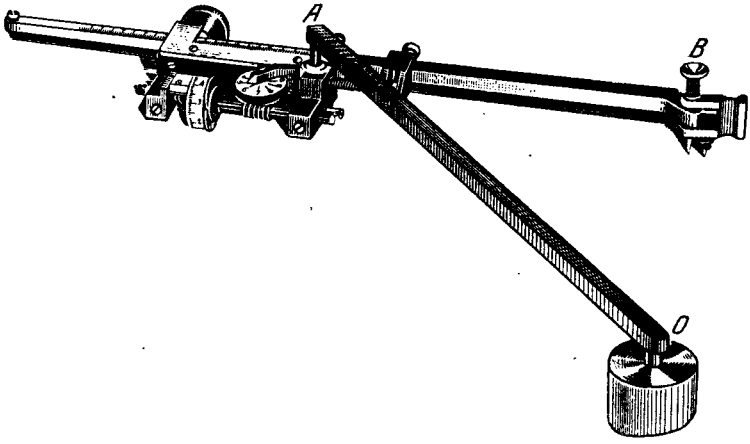
§ 1. Полярный планиметр

Внешний вид этого прибора (одной из его основных моделей) показан на черт. 19; схема прибора изображена на черт. 20.

Рычаг OA может вращаться вокруг точки O, которую называют полюсом. В этой точке O рычаг OA имеет короткую иглу, которая вкалывается в чертежную доску. (Чтобы игла не выскакивала из доски, она скреплена с небольшим круглым грузом.)

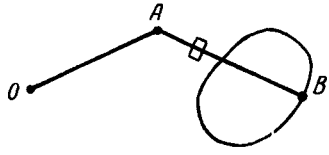
Рычаг AB может свободно вращаться вокруг оси, имеющейся в точке A. В конце B рычага AB имеется штифт с рукояткой; с ее помощью обводят штифтом замкнутую линию L, ограничивающую площадь, которую нужно определить. На рычаг AB насажено колесико, которое может свободно вращаться вокруг него, как вокруг оси. Тут же помещен счетчик числа оборотов колесика, дающий показания с точностью до тысячных долей одного оборота (на черт. 20 счетчик не показан). Весь прибор опирается на чертежную доску в трех точках: «острие» O, вколотое в доску, закругленный конец штифта B и точка ободка счетного колесика, в которой оно касается чертежа.

Употребление прибора весьма просто. Для измерения площади, заключенной внутри линии L, вкалывают иглу O в чертежную доску, совмещают конец штифта с какой-либо точкой B_1 на линии L и производят на шкале счетчика



Черт. 19. Полярный планиметр.

оборотов отсчет положения колесика — пусть этот отсчет будет φ_1. Далее обводят конец штифта тщательно по контуру L, и когда конец штифта возвращается — после полного обхода контура — в исходное положение B_1, производят второй отсчет положения колесика; пусть этот отсчет будет φ_2. Тогда площадь S_L, заключенная внутри контура L, легко вычисляется через разность $\varphi_2 - \varphi_1$, показывающую число оборотов, на которое повернулось счетное колесо при полном обходе штифта по контуру L. В том случае, когда полюс O расположен вне контура L (черт. 20 — этот случай особенно часто встречается на практике), площадь S_L вычисляется по формуле



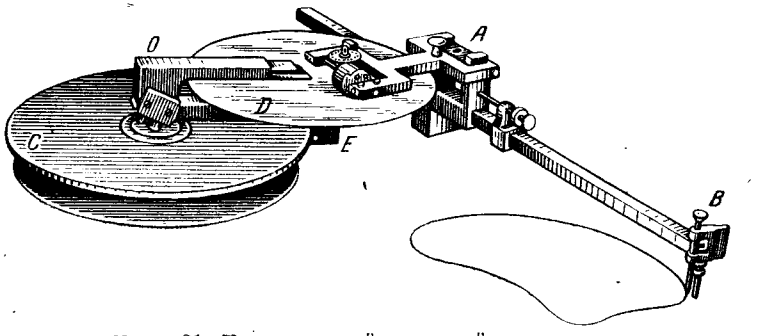
Черт. 20. Схема полярного планиметра.

$$S_L = k(\varphi_2 - \varphi_1), \qquad (1)$$

в которой коэффициент пропорциональности k представляет собой число, зависящее от размеров прибора. Его значение чаще всего приложено к прибору. Ниже будет показано,

как его можно вычислить, выполнив обвод штифта по замкнутой линии, площадь которой заранее известна.

Более сложная модель полярного планиметра, изображенная на черт. 21, представляет собой прибор, устройство которого в основном то же, что и модели, описанной в § 1: и здесь рычаг OA может вращаться вокруг точки O,



Черт. 21. Прецизионный дисковый планиметр.

а рычаг AB, несущий счетное колесико и штифт B, может вращаться вокруг оси, проходящей через точку A. Особенность же этой модели состоит в том, что счетное колесико катится не по чертежу, а по особому диску, тщательно обклеенному специальной, слегка шероховатой бумагой — этим устраняется возможность скольжения колесика, когда чертежная бумага слишком гладкая. Кроме того, специальное устройство заставляет диск D вращаться вместе с рычагом OA и притом на угол, пропорциональный углу поворота рычага[1]); благодаря этому поворот счетного колесика во много раз больше, чем соответствующий оборот счетного колесика на простой модели (черт. 19) — это увеличивает точность отсчета угла $\varphi_2 - \varphi_1$. Прецизионный[2]) дисковой полярный планиметр, изображенный на черт. 21, дает в работе точность, примерно в пять раз бо́льшую, чем обычный полярный планиметр (при обмере площади величиной около 100 *кв. см* его точность — до $0{,}1\%$).

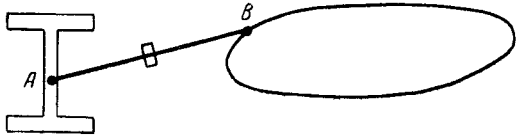
---

[1]) Рычаг OA несет на себе (снизу) шестеренку E, ось которой параллельна вертикальной оси, проходящей через точку O, и которая катится по ободу цилиндра C. Эта шестеренка твердо соединена с диском D, который и делает поэтому такой же поворот, как и шестеренка.

[2]) Precisus — точный (по-латински).

§ 2. Прямолинейныи планиметр

Размеры полярного планиметра ограничивают возможность его использования. Легко видеть, что линия L, ограничивающая площадь, подлежащую измерению планиметром, должна располагаться внутри окружности, центр которой в полюсе O, а радиус равен сумме длин рычагов OA и AB. Таким образом, полярный планиметр не может быть с успехом использован для измерения площадей длинных, хотя бы и достаточно узких фигур [1]). Для измерения такого рода площадей используют прямолинейный планиметр (черт. 22),

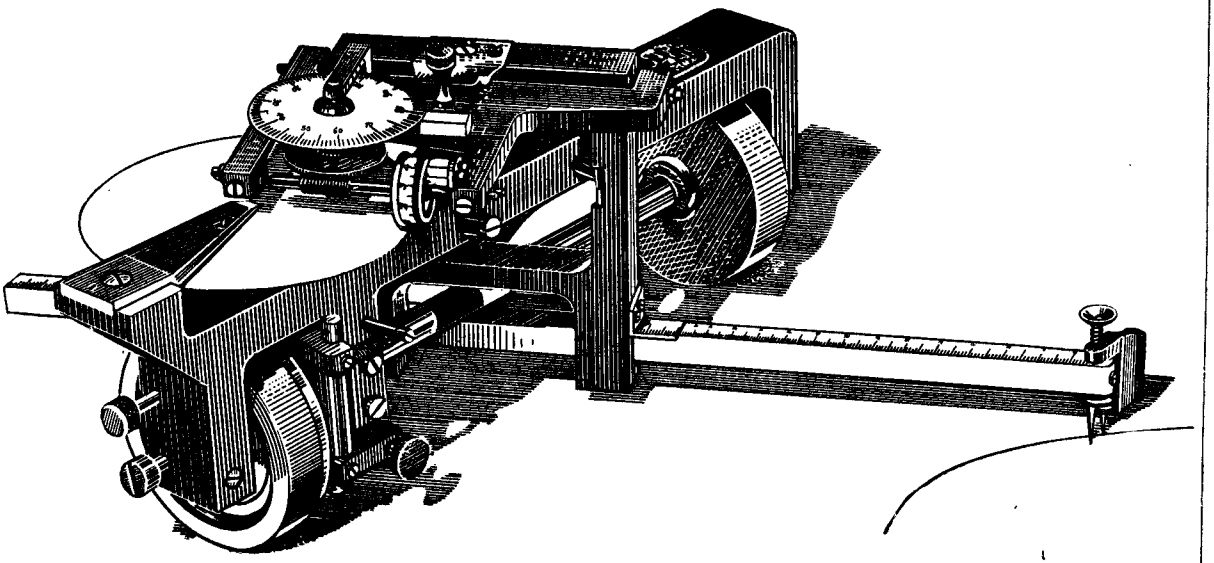


Черт. 22. Схема прямолинейного планиметра.

который, так же как и полярный, содержит рычаг AB, несущий на себе счетное колесико и обводной штифт. Отличие от полярного планиметра состоит в том, что конец A рычага AB принужден в силу конструкции прямолинейного планиметра двигаться только вдоль некоторой прямой линии (в полярном планиметре конец A рычага AB вынужден двигаться только вдоль окружности). В различных моделях это осуществляется различными способами. На черт. 22 изображен катковый прямолинейный планиметр, в котором строгое прямолинейное движение точки A осуществляется с помощью катка. Он состоит из двух массивных цилиндрических колес одинакового радиуса, ободы которых сделаны слегка шероховатыми — это заставляет их только катиться, но не скользить по чертежной бумаге, на которую нанесен измеряемый контур L. Оба колеса жестко связаны одно с другим массивной осью. В силу такой конструкции каждая точка этой оси принуждена двигаться — при движении катка — только строго прямолинейно. К какой-либо точке оси и крепится ось A, вокруг которой может свободно вращаться рычаг AB.

---

[1]) Можно, конечно, разбить площадь на несколько «коротких» — это, однако, усложняет работу и понижает ее точность.



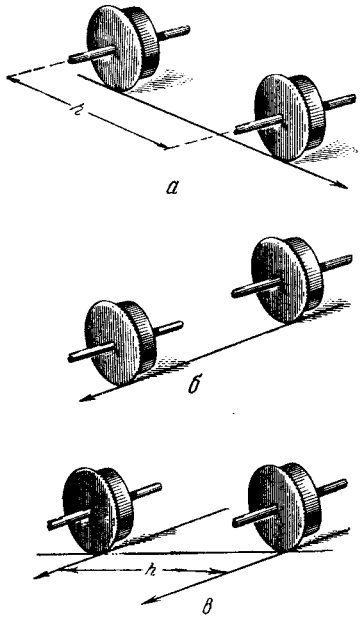
Черт. 23. Прецизионный прямолинейный дисково-катковый планиметр.

Вычисление площади с помощью каткового планиметра выполняется точно так же, как и с помощью полярного планиметра. Дополнительное удобство состоит в том, что каток можно прокатить по чертежу любого размера и можно, следовательно, измерить площадь «длинной» фигуры.

Повышенная точность возникает при работе с прецизионным прямолинейным дисково-катковым планиметром, изображенным на черт. 23; его диск играет ту же роль, что и диск прецизионного полярного планиметра.

§ 3. Элементарное перемещение рычага планиметра

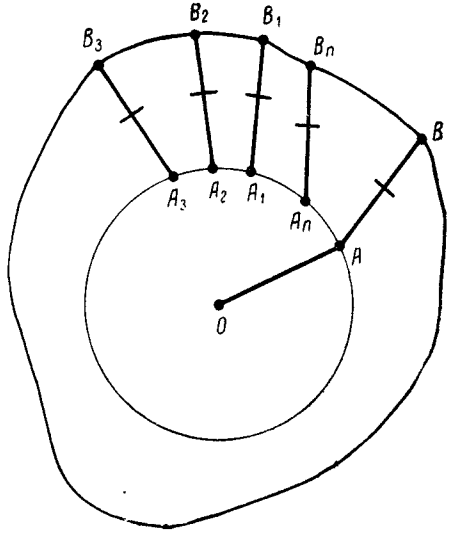
Когда штифт B непрерывно обходит заданный замкнутый контур L, начиная с некоторой точки B_1, и возвращается в нее же, рычаг AB непрерывно перемещается по плоскости, принимая различные положения, и возвращается в исходное положение. Счетное колесико вращается при этом вокруг рычага AB, как вокруг оси. Если на каком-либо участке движения рычаг AB перемещается в направлении, перпендикулярном к рычагу (т. е. к оси вращения счетного колесика) (черт. 24, *а*), на расстояние h, то ободок колесика катится по плоскости чертежа без скольжения и поворачивается на $\frac{h}{2\pi r}$ оборотов (r — радиус колесика). Если же рычаг перемещается вдоль самого себя (черт. 24, *б*), то колесико только скользит по плоскости, совсем не вращаясь; если, наконец, рычаг перемещается (оставаясь параллельным самому себе) под некоторым углом к своему направлению, то колесико отчасти катится и отчасти скользит; оно поворачивается при этом на число оборотов, мень-



Черт. 24.

шее, чем $\frac{h}{2\pi r}$, где h — попрежнему расстояние, на которое переместилась ось (черт. 24, *в*).

Естественно, возникает вопрос: каково будет количество оборотов, которое сделает счетное колесико в результате всего замкнутого движения рычага AB? Или иначе — какая существует зависимость между этим числом и замкнутым контуром L, задание которого полностью определяет движение рычага AB на плоскости чертежа?



Черт. 25.

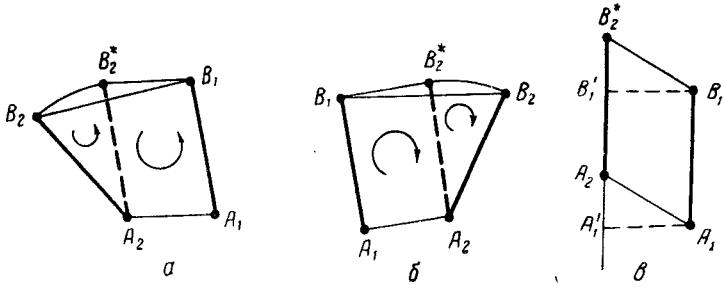
Для облегчения решения этой трудной задачи мы позволим себе заменить непрерывное движение рычага AB некоторым другим, практически мало от него отличающимся. С этой целью отметим на заданном контуре L очень большое число (очень близких между собой) последовательно — по ходу штифта—проходимых точек $B_1, B_2, \ldots, B_n, B_1$ (черт. 25). Им соответствуют последовательно принимаемые рычагом AB положения

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ \ldots,\ A_nB_n,\ A_1B_1.$$

Будем теперь предполагать, что элементарный переход от положения A_1B_1 к положению A_2B_2 производится следующим образом.

I. Сначала выполняется параллельный перенос рычага AB, переводящий его из положения A_1B_1 в положение $A_2B_2^*$ (черт. 26, *а* и *б*); четырехугольник $A_1B_1B_2^*A_2$ — параллелограмм, сторона которого A_1A_2 очень мала). Это перемещение будем для краткости называть *элементарным переносом*; площадь ориентированного параллелограмма $A_1B_1B_2^*B_2$,

«заметаемую» при этом элементарном переносе (коротко: площадь элементарного переноса), обозначим буквой s_1. Напомним, что s_1 — положительное число, если ориентированный параллелограмм правый (см. стр. 18), и отрицательное, если этот параллелограмм левый (черт. 26, *а* и *б*).



Черт. 26.

II. Затем выполняется поворот рычага AB, переводящий его из положения $A_2B_2^*$ в положение A_2B_2 (черт. 26, *а* и *б*, угол $B_2^*A_2B_2$ очень мал). Это перемещение будем для краткости называть *элементарным поворотом*. Величину угла элементарного поворота, т. е. угла $B_2^*A_2B_2$, обозначим буквой ω_1; число ω_1 — положительное, если поворот происходит против часовой стрелки, и отрицательное, — если по часовой стрелке (черт. 26, *а* и *б*).

Перемещение, переводящее рычаг AB из положения A_2B_2 в положение A_3B_3, также представим себе как результат выполнения элементарного переноса, а вслед за ним и элементарного поворота; площадь переноса обозначим через s_2, угол поворота через ω_2. Аналогичным образом поступим и для всех остальных положений рычага AB.

§ 4. Число оборотов счетного колеса при элементарном перемещении рычага

Элементарный параллельный перенос рычага AB из положения A_1B_1 в положение $A_2B_2^*$ мы выполним следующим образом.

I′. Сначала переместим рычаг AB из положения A_1B_1 параллельно самому себе в направлении, перпендикулярном

к рычагу, до совпадения с прямой, содержащей отрезок $A_2B_2^*$ (черт. 26, *в*).

II′. Из полученного положения $A_1'B_1'$ перейдем в положение $A_2B_2^*$, сдвинув рычаг вдоль самого себя.

При перемещении I′ счетное колесико повернется, очевидно, на $v_1 = \frac{h_1}{2\pi r}$ оборотов, где h_1 есть высота ориентированного параллелограмма $A_1B_1B_2^*A_2$.

Если условимся считать h_1 положительным в случае правой ориентации этого параллелограмма и отрицательным в случае левой ориентации, то будем иметь: $h_1 = \frac{s_1}{AB}$ (где s_1 — площадь ориентированного четырехугольника $A_1B_1B_2^*A_2$); следовательно,

$$v_1 = \frac{s_1}{2\pi r \cdot AB}. \qquad (2)$$

Знак числа v_1 показывает, очевидно, в какую сторону вращалось счетное колесико при элементарном переносе.

При перемещении II′ счетное колесико только скользит и совсем не поворачивается. Таким образом, количество оборотов, которое сделает счетное колесико при элементарном параллельном переносе I, определится формулой (2).

Перейдем теперь к подсчету числа оборотов v_1^* счетного колесика, которое оно сделает при элементарном повороте II, переводящем рычаг AB из положения $A_2B_2^*$ в положение A_2B_2. Пусть C — точка рычага AB, в которой находится центр счетного колесика; учитывая, что при элементарном повороте на ω_1^0 точка C пройдет путь $2\pi \frac{\omega_1^0}{360^\circ} AC$, придем к заключению, что счетное колесико радиуса r сделает при этом

$$v_1^* = \omega_1 \cdot \frac{AC}{r \cdot 360} \qquad (2^*)$$

оборотов. Знак числа v_1^* (совпадающий со знаком ω_1) показывает, очевидно, в какую сторону вращалось счетное колесико при элементарном повороте.

§ 5. Число оборотов счетного колеса при замкнутом перемещении рычага

Из формул (2) и (2*) следует, что это число N равно сумме двух слагаемых:

$$N = k'(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) + \frac{k^*}{360}(\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n), \quad (3)$$

где

$$k' = \frac{1}{2\pi r \cdot AB}, \qquad k^* = \frac{AC}{r}.$$

Существенную роль играет в дальнейшем то обстоятельство, что значение второго слагаемого можно заранее учесть!

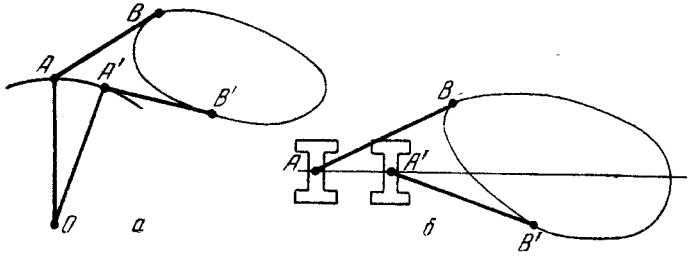
В самом деле, если полюс O полярного планиметра находится внутри контура, площадь которого нужно измерить (черт. 25), то при полном обходе штифта B по контуру L рычаг AB, поворачиваясь последовательно на углы ω_1, ω_2, ..., ω_n, опишет полный оборот и, следовательно,

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n = 360°.$$

В этом случае (случай $\mathscr{A}$) имеет место, таким образом, формула

$$N = k'(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) + k^*. \quad (4)$$

Значительно чаще встречается, однако, на практике, что полюс O полярного планиметра находится вне контура L и, следовательно (черт. 27, *а*), рычаг AB поворачивается в одну



Черт. 27.

сторону на столько же, насколько и в другую. В этом случае (случай $\mathscr{B}$) общая сумма всех поворотов ω_i будет очевидно, равна нулю:

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_n = 0°$$

а число оборотов N счетного колесика определится по формуле

$$N = k'(s_1 + s_2 + \ldots + s_n). \qquad (5)$$

Легко понять (черт. 27, *б*) что именно этот случай будет иметь место всегда, если измерение площади производится с помощью прямолинейного планиметра.

Замечание. Мы иллюстрировали оба возможных случая ($\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$) на черт. 25 и 27, в которых показаны наиболее простые контуры. Читатель сумеет самостоятельно убедиться в справедливости формул (4) и (5) и для более сложных контуров.

§ 6. Вспомогательная геометрическая теорема

Формулы (4), (5) устанавливают связь, существующую между числом N оборотов, которое делает счетное колесико при полном обходе штифта B по контуру L, и суммой

$$S^* = s_1 + s_2 + \ldots + s_n \qquad (6)$$

всех (соответствующих этому замкнутому движению) площадей элементарных переносов рычага AB.

Особенно важную роль в теории планиметра играет, однако, чисто геометрическая теорема, дающая возможность доказать, что в случае $\mathscr{B}$ площадь S^* равна искомой площади S_L, ограниченной заданным контуром L:

$$S^* = S_L. \qquad (7)$$

Доказав это (см. ниже) и сопоставив формулы (5), (6) и (7), мы получим:

$$N = k'S_L$$

и, следовательно,

$$S_L = \frac{1}{k'} N = kN \qquad (k = 2\pi rl), \qquad (1')$$

т. е. убедимся в справедливости того правила вычисления площадей с помощью планиметра, которое мы указали в § 1 этой главы.

Обратимся теперь к этой вспомогательной геометрической теореме.

Основная теорема. *Площадь, заметаемая*[1]) *отрезком* AB *при его произвольном замкнутом перемещении на плоскости, равна разности площадей, ограниченных ориентированными контурами* L_B *и* L_A, *описываемыми концами* B *и* A *этого отрезка.*

Справедливость этой теоремы представляется почти «очевидной», если ограничиться рассмотрением только того случая который изображен на черт. 25: заметаемая площадь равна площади «кольца», образуемого «внешним» контуром L_B и «внутренним» контуром L_A, и, следовательно, равна разности площадей, ограниченных этими контурами.

«Геометрическая очевидность», к сожалению, исчезает, когда мы обращаемся к рассмотрению других возможных случаев движения отрезка AB по плоскости.

Как в этих случаях понимать выражение «площадь, заметаемая отрезком AB»? Будет ли она и теперь равна разности площадей L_B и L_A?

Полностью разобраться в этих случаях (и в более сложных, которые может придумать читатель) станет возможно только тогда, когда мы откажемся от школьного способа — измерять площадь фигуры всегда положительным числом, и воспользуемся понятием площади ориентированной фигуры (она может быть либо положительной, либо отрицательной, либо даже равной нулю!), которое было рассмотрено в первой главе этой книжки.

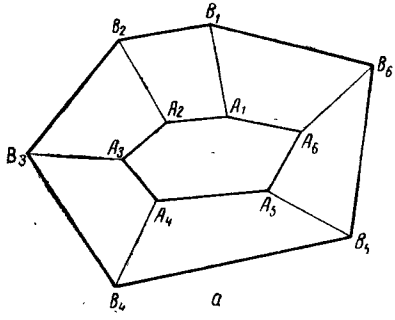
Прежде чем приступить к доказательству «основной теоремы», уточним понятие «площадь, заметаемая отрезком». Для большей простоты откажемся от рассмотрения непрерывного движения отрезка AB и будем предполагать, что он перемещается скачками: из положения A_1B_1 в положение A_2B_2, из этого положения в положение A_3B_3 и т. д. (черт. 28). Мы будем при этом, конечно, считать, что скачки очень малые (т. е. перемещения B_1B_2, B_2B_3, ... конца B, так же как и соответствующие перемещения A_1A_2, A_2A_3, ... точки A очень малы) и общее число их, которое выполнит отрезок, чтобы возвратиться в исходное положение,— весьма

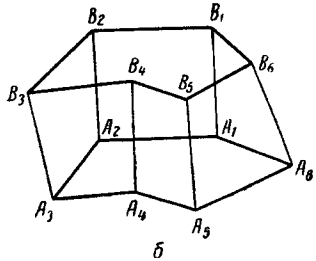
---

[1]) Выражение *площадь, заметаемая отрезком при его движении*, вероятно, знакомо читателю. Оно встречается, например, в формулировке второго закона Кеплера, касающегося скорости движения планеты вокруг Солнца: «площади, заметаемые радиусом-вектором планеты (т. е. заметаемые отрезком AB, начало которого A — Солнце, конец B — планета) в два равных промежутка времени, равны между собой».

велико. Замкнутые контуры L_B и L_A заменятся при таком рассмотрении замкнутыми ориентированными многоугольниками $B_1B_2 \dots B_n$ и $A_1A_2 \dots A_n$, которые мы будем для краткости обозначать соответственно P_B и P_A.

При первом скачке отрезок AB заметет площадь четырехугольника, а лучше и точнее сказать, площадь ориентированного четырехугольника $A_1B_1B_2A_2$, при втором скачке — площадь ориентированного четырехугольника $A_2B_2B_3A_3$ и т. д. Сумму площадей всех таких ориентированных четырехугольников, возникающих при рассматриваемом перемещении отрезка $\overrightarrow{AB}$, мы и будем называть *площадью, заметенной отрезком* $\overrightarrow{AB}$. Читатель, несомненно, обратил внимание на то, что при такой точке зрения на заметаемую площадь она может содержать в своем составе как положительные, так и отрицательные слагаемые. Так, например, для движения отрезка $\overrightarrow{AB}$, изображенного на черт. 28, *б*, площади элементарных четырехугольников, расположенных по верхнему краю многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$, положительны, а по нижнему краю этого многоугольника отрицательны. Теперь уже не составит труда точно сформулировать и строго доказать геометрическую теорему, лежащую в основе теории планиметра.





Черт. 28.

Теорема 6. *Если направленный отрезок* $\overrightarrow{AB}$, *перемещаясь по плоскости, занимает последовательно положения*

$$\overrightarrow{A_1B_1},\ \overrightarrow{A_2B_2},\ \dots,\ \overrightarrow{A_nB_n},\ \overrightarrow{A_1B_1}$$

и, следовательно, возвращается в исходное положение, то заметенная им площадь S *равна разности площадей*

ориентированных многоугольников $B_1B_2\ldots B_n$ и $A_1A_2\ldots A_n$:

$$S=(B_1B_2\ldots B_n)-(A_1A_2\ldots A_n). \tag{8}$$

Доказательство. Используя формулу (8) из гл. I, стр. 18 (для вычисления площади любого ориентированного многоугольника как суммы площадей ориентированных треугольников, имеющих общую вершину) и применяя ее к элементарным четырехугольникам, получим:

$$(A_1B_1B_2A_2)=(OA_1B_1)+(OB_1B_2)+(OB_2A_2)+(OA_2A_1),$$
$$(A_2B_2B_3A_3)=(OA_2B_2)+(OB_2B_3)+(OB_3A_3)+(OA_3A_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n)=(OA_{n-1}B_{n-1})+(OB_{n-1}B_n)+$$
$$+(OB_nA_n)+(OA_nA_{n-1}),$$
$$(A_nB_nB_1A_1)=(OA_nB_n)+(OB_nB_1)+(OB_1A_1)+(OA_1A_n).$$

Складывая почленно эти равенства и выполнив в правой части очевидные сокращения, получим:

$$S=\{(OB_1B_2)+(OB_2B_3)+\ldots+(OB_{n-1}B_n)+(OB_nB_1)\}+$$
$$+\{(OA_2A_1)+(OA_3A_2)+\ldots+(OA_nA_{n-1})+(OA_1A_n)\}.$$

Учитывая, что $(OA_{i+1}A_i)=-(OA_iA_{i+1})$ и снова используя формулу (8) из гл. I, получим:

$$S=(B_1B_2\ldots B_n)-(A_1A_2\ldots A_n),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Следовало ли снабдить наше доказательство чертежом? Строго говоря, в этом нет никакой необходимости, так как при проведении доказательства мы воспользовались формулой, справедливой при любом расположении точек, участвующих в рассмотрении. Полезно все же уяснить себе геометрически наглядно полное содержание теоремы, рассмотрев различные возможные случаи.

§ 7. Использование вспомогательной геометрической теоремы для теории планиметра

Доказанная в § 6 этой главы геометрическая теорема дает возможность убедиться в справедливости соотношения (7). (Из этого соотношения, как мы показали в § 5, непосредственно следует справедливость формулы (1′), с помощью которой измеряют планиметром площадь S_L.)

Действительно, применим эту теорему к движению рычага AB планиметра. Если мы, как в § 6, заменим непрерывное движение рычага совокупностью n элементарных перемещений, а каждое из них, как в § 4, заменим двумя: элементарным переносом и элементарным поворотом, то, учитывая, что (черт. 26)

$$(A_1B_1B_2^*A_2)+(A_2B_2^*B_2A_2)=(A_1B_1B_2^*B_2A_2),$$

получим:

$$\{(A_1B_1B_2^*A_2)+(A_2B_2^*B_2)\}+\{(A_2B_2B_3^*A_3)+(A_3B_3^*B_3)\}+\ldots$$
$$\ldots+\{(A_nB_nB_1^*A_1)+(A_1B_1^*B_1)\}=S_B-S_A\,^{1})$$

и, следовательно,

$$(s_1+s_1^*)+(s_2+s_2^*)+\ldots+(s_n+s_n^*)=S_B-S_A, \qquad (9)$$

где s_i — площадь элементарного параллелограмма, возникающего при i-м переносе, а s_i^* — площадь элементарного равнобедренного «треугольника», возникающего при i-м элементарном повороте.

Остановимся теперь на рассмотрении случая $\mathscr{B}$ (см. § 5, черт. 27), т. е. предположим, что рычаг AB поворачивается настолько же в одну сторону, насколько и в другую. Очевидно, что в этом случае

$$s_1^*+s_2^*+\ldots+s_n^*=0,$$

так как площади этих равнобедренных треугольников практически не отличаются от площадей круговых секторов (с очень малым центральным углом), возникающих при элементарных поворотах. Формула (9) примет поэтому вид

$$s_1+s_2+\ldots+s_n=S_B-S_A. \qquad (10)$$

Примем теперь во внимание, что замкнутая линия, описываемая точкой A, представляет собой: для полярного планиметра — некоторую дугу окружности, проходимую дважды

---

[1]) Мы заменили, таким образом, заданный контур L многоугольником $B_1B_1^*B_2B_2^*\ldots B_{n-1}B_{n-1}^*B_nB_n^*$, имеющим $2n$ вершин; последовательные положения рычага AB: A_1B_1, $A_2B_2^*$, A_2B_2, $A_3B_3^*$, ... образуют $2n$ ориентированных четырехугольников: $A_1B_1B_2^*A_2$, $A_2B_1^*B_2A_2$, $A_2B_2B_3^*A_3$, ...; очевидно, что площадь четырехугольника $(A_2B_1^*B_2A_2)$ равна площади треугольника $(A_2B_2^*B_2)$.

(на черт. 27, *а* сначала от точки A до точки A', а затем от точки A' до точки A); для прямолинейного планиметра — некоторый отрезок прямой, также проходимый дважды (на черт. 27, *б* от точки A до точки A', а затем от точки A' до точки A).

И в том и в другом случае площадь S_A равна, очевидно, нулю; формула (10) дает:

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_n = S_B$$

и, следовательно,

$$S^* = S_B,$$

что и требовалось доказать.

Несколько сложнее обстоит дело в случае $\mathscr{A}$. Рассмотрим случай, когда полюс полярного планиметра находится внутри контура L и когда при обводе штифта B по замкнутому контуру L рычаг OA описал полную окружность, а рычаг AB успел повернуться на 360° (черт. 25).

Очевидно, что при этом

$$s_1^* + s_2^* + \ldots + s_n^* = \pi \cdot AB^2,$$
$$S_A = \pi \cdot OA^2,$$

и, следовательно, формула (9) примет вид

$$(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) + \pi \cdot AB^2 = S_B - \pi \cdot OA^2,$$

откуда в силу (6)

$$S_B = S^* + (\pi \cdot AB^2 + \pi \cdot OA^2). \qquad (11)$$

Примем теперь во внимание, что согласно формуле (4) число N оборотов колесика при замкнутом движении рычага AB определяется в рассматриваемом случае $\mathscr{A}$ формулой

$$N = \frac{1}{2\pi r \cdot AB} S^* + \frac{AC}{r}$$

и, следовательно,

$$S^* = (2\pi r \cdot AB) N - 2\pi \cdot AB \cdot AC.$$

Подставляя это выражение для S^* в (11), получим:

$$S_B = kN + k^{**}, \qquad (12)$$

где

$$\left.\begin{aligned} k &= 2\pi r \cdot AB, \\ k^{**} &= \pi(AB^2 + OA^2 - 2AB \cdot AC), \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

По формуле (12) и производят вычисление площади, ограниченной контуром L, в том случае, когда при полном обводе штифта B по контуру L рычаг OA описал полный круг, а рычаг AB повернулся на 360°.

Замечание. Коэффициенты k и k^{**}, входящие в формулы (1′) и (12), по которым производятся вычисления площади S_L в случаях $\mathscr{B}$ и $\mathscr{A}$, соответственно, могут быть вычислены по формулам (13) через величины r, OA, AB, AC, зависящие только от размеров планиметра. Значения коэффициентов k и k^{**} часто прилагаются к планиметру. Они могут быть, однако, очень просто вычислены для заданного планиметра без предварительных измерений величин r, OA, OB, AC.

С этой целью достаточно тщательно обвести штифтом B окружность L_0 некоторого заданного радиуса R. Если счетчик числа оборотов колесика планиметра покажет N_0 оборотов, то в случае, когда полюс планиметра O будет расположен вне окружности (случай $\mathscr{B}$), должно иметь место равенство

$$S_L = k \cdot N_0, \tag{1′}$$

и, следовательно, получим:

$$k = \frac{\pi R_0^2}{N_0}. \tag{14}$$

Для нахождения коэффициента k^{**} обведем штифтом B некоторую другую окружность L_1 радиуса R_1 так, чтобы полюс O планиметра находился внутри L_1 (случай $\mathscr{A}$). Если счетчик покажет N_1 оборотов, то должно иметь место равенство (12)

$$S_{L_1} = kN_1 + k^{**},$$

откуда следует, что

$$k^{**} = \pi R_1^2 - kN_1,$$

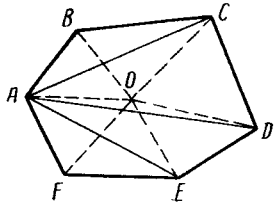
где k уже считается вычисленным (хотя бы по формуле (14)).

ГЛАВА III

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКА, ЗАДАННОГО НА МЕСТНОСТИ

§ 1. Постановка задачи

При вычислении площади многоугольника, заданного на местности (например, при нахождении площади земельного участка, изображенного на черт. 29), возникают трудности, которые при первом взгляде ускользают от внимания. В самом деле, для нахождения площади участка *ABCDEF* достаточно, казалось бы, разбить его на треугольные участки, например так, как это показано на черт. 29, вычислить площадь каждого треугольного участка и эти площади сложить.



Черт. 29.

Все это, однако, справедливо только для участков небольших сравнительно размеров. Если же, например, на участке *ABCDEF* длина стороны *AB* равна, скажем, 100 *м*, то длина стороны *AD*, которую мы искусственно ввели в рассмотрение, будет уже порядка 300 *м*, и измерение ее длины представит дополнительные трудности [1]). Можно, конечно, попытаться выйти из затруднения путем выбора другого, более удачного разбиения участка на треугольники, но, как легко понять, это не всегда приводит к успеху.

---

[1]) Вычисление расстояний и углов на местности представляет собой серьезную практическую задачу, решение которой тем более затруднительно, чем бо́льшие расстояния приходится измерять. Изложение основных приемов съемки на местности читатель найдет в книге: С. Голицын, Хочу быть топографом, Детгиз, М., 1954.

Возникает, таким образом, потребность найти такой способ вычисления площади участка, ограниченного многоугольником, который может быть использован во всех случаях и не требует вычисления длин каких-либо вспомогательных расстояний. Точнее говоря, возникает вопрос: существует ли возможность вычислить площадь многоугольника, если измерены длины всех его сторон и измерены все его углы?

Такая возможность действительно существует. В следующих параграфах этой главы мы выведем формулу для вычисления площади многоугольника по заданным его сторонам и углам. Существенное облегчение при выводе этой практически важной формулы и убеждение в ее достоверности для многоугольника любого сложного строения (выпуклого и невыпуклого) мы получим, если используем методы вычисления площадей ориентированных многоугольников, которые мы изложили в предыдущих главах этой книги. Так мы и поступим.

§ 2. Несколько определений и обозначений

Формулировка и доказательство теоремы, о которой пойдет ниже речь, весьма упростятся, если мы воспользуемся следующими определениями и обозначениями.

1. *Два направленных отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{A'B'}$ *будем называть равными, если четырехугольник* $ABA'B'$ *представляет собой параллелограмм, в котором вершина* A *противоположна вершине* B' (*и, следовательно, вершина* B *противоположна вершине* A') (черт. 30).

Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{A''B''}$, *лежащие на одной и той же прямой* (черт. 30), *называются равными, если каждый из них равен некоторому направленному отрезку* $\overrightarrow{A'B'}$, *не лежащему на прямой* AB [1]).

---

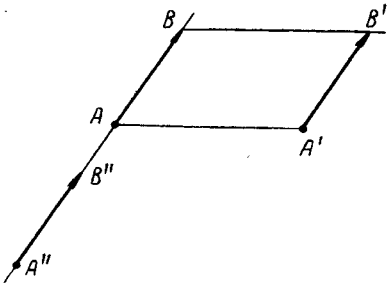
[1]) Учитывая, что направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ определяется упорядоченной парой точек A, B (A — первая, «начало», B — вторая, «конец» направленного отрезка), целесообразно в целях общности изложения рассматривать как направленные также и отрезки $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{PP}$ и т. п., т. е. такие, у которых первая и вторая точки совпадают. Все такие особого типа «направленные отрезки» называют *нулевыми* и считают, что они равны между собой.

2. *Направленный отрезок называют вектором.* В некоторых случаях полезно в целях краткости обозначать вектор одной буквой, например:

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{PQ} = \boldsymbol{b}.$$

Эту букву принято печатать жирным шрифтом для того, чтобы сразу дать понять, что речь идет о векторе, а не о числе.

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ обозначен буквой $\boldsymbol{a}$, то все векторы, равные вектору $\overrightarrow{AB}$ и имеющие другое начало и другой конец, все же обозначают той же буквой $\boldsymbol{a}$.



Черт. 30.

3. *Условимся говорить, что ориентированный треугольник ABC построен на векторах* $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (порядок векторов важен!). Можно также говорить, что он построен на векторах $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$, а также на векторах $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$.

4. *Площадь ориентированного треугольника ABC, которую мы выше обозначали* (ABC), *удобно в некоторых случаях обозначать* $s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$:

$$(ABC) = s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}).$$

Легко понять, что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ равны соответственно векторам $\overrightarrow{A'B'}$ и $\overrightarrow{B'C'}$, то

$$(ABC) = (A'B'C')\ ^{1})$$

и, следовательно,

$$s(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = s(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{B'C'}).$$

Если вектор $\overrightarrow{AB}$ (и все ему равные) обозначим через $\boldsymbol{a}$, а вектор $\overrightarrow{BC}$ — через $\boldsymbol{b}$, то

$$(ABC) = (A'B'C') = s(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$

---

[1]) См. задачу 15 на стр. 26.

5. *Условимся говорить, что ориентированный многоугольник* $A_1A_2 \dots A_n$ *построен на векторах*

$$\overrightarrow{A_1A_2},\ \overrightarrow{A_2A_3},\ \dots,\ \overrightarrow{A_{n-1}A_n},\ \overrightarrow{A_nA_1} \qquad (1)$$

(порядок важен!). Ориентированную площадь $(A_1A_2 \dots A_n)$ этого многоугольника будем обозначать:

$$(A_1A_2 \dots A_n) = s(\overrightarrow{A_1A_2},\ \overrightarrow{A_2A_3},\ \dots,\ \overrightarrow{A_nA_1}).$$

Легко убедиться, что если векторы (1) соответственно равны векторам

$$\overrightarrow{B_1B_2},\ \overrightarrow{B_2B_3},\ \dots,\ \overrightarrow{B_{n-1}B_n},\ \overrightarrow{B_nB_1}, \qquad (1')$$

то

$$(A_1A_2 \dots A_n) = (B_1B_2 \dots B_n)\ ^{1}).$$

Поэтому, если ввести обозначения

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \boldsymbol{a}_1,\ \overrightarrow{A_2A_3} = \boldsymbol{a}_2,\ \dots,\ \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \boldsymbol{a}_{n-1},\ \overrightarrow{A_nA_1} = \boldsymbol{a}_n,$$

то

$$(A_1A_2 \dots A_n) = (B_1B_2 \dots B_n) = s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{a}_n).$$

§ 3. Вспомогательная теорема

Теорема 7. *Как бы ни были расположены на плоскости точки*

$$A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_{n-1},\ A_n \text{ и } B_n,$$

всегда имеет место равенство

$$(A_1A_nB_n) = (A_1A_2B_2) + (A_2A_3B_3) + \dots + (A_{n-1}A_nB_n), \qquad (2)$$

если точки $B_1,\ B_2,\ \dots,\ B_n$ *выбраны так, что векторы*

$$\overrightarrow{A_2B_2},\ \overrightarrow{A_3B_3},\ \dots,\ \overrightarrow{A_{n-1}B_{n-1}}$$

равны вектору $\overrightarrow{A_nB_n}$.

Для доказательства [2]) используем доказанную в § 6 гл. II теорему о площади, заметаемой при замкнутом движении

---

[1]) См. задачу 15 на стр. 26.

[2]) Мы намеренно не предлагаем никакого чертежа, чтобы подчеркнуть общность доказательства. Однако читатель поступит правильно, если поможет себе самостоятельно сделаным чертежом, в котором ограничится пятью, например, точками, взятыми совершенно произвольно.

отрезка. Рассмотрим замкнутое перемещение вектора $\overrightarrow{AB}$, при котором он, начиная от положения вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$, равного вектору $\overrightarrow{AB}$, принимает последовательно положения равных ему векторов

$$\overrightarrow{A_2B_2},\ \overrightarrow{A_3B_3},\ \ldots,\ \overrightarrow{A_nB_n}$$

и возвращается в положение вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Согласно упомянутой теореме § 6 имеет место равенство

$$(A_1B_1B_2A_2)+(A_2B_2B_3A_3)+\ldots+(A_{n-1}B_{n-1}B_nA_n)+ \\ +(A_nB_nB_1A_1)=(B_1\ldots B_n)-(A_1\ldots A_n). \quad (3)$$

Разность, стоящая в правой части, равна, очевидно, нулю, так как в силу равенства всех векторов $\overrightarrow{A_iB_i}$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ ориентированный многоугольник $B_1B_2\ldots B_n$ получается из многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ путем параллельного переноса на вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ (см. задачу 14 на стр. 26) и, следовательно, их площади равны между собой.

Учитывая теперь, что ориентированный четырехугольник $A_iB_iB_{i+1}A_{i+1}$ есть параллелограмм, противоположные стороны которого представляют собой равные векторы $\overrightarrow{A_iB_i}$ и $\overrightarrow{A_{i+1}B_{i+1}}$, приходим к выводу:

$$(A_iB_iB_{i+1}A_{i+1})=-(A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i)=-2(A_iA_{i+1}B_{i+1}), \\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$$
$$(A_nB_nB_1A_1)=(A_1A_nB_nB_1)=2(A_1A_nB_n).$$

Подставляя эти значения в (3), получим (2), что и требовалось доказать.

Замечание. Введем обозначения

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_1,\ \overrightarrow{A_2A_3}=\boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_{n-1},\ \overrightarrow{A_nB_n}=\boldsymbol{a}_n.$$

Тогда согласно условию теоремы

$$\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{A_3B_3}=\ldots=\overrightarrow{A_{n-1}B_{n-1}}=\boldsymbol{a}_n,$$

и следовательно, формула (2) принимает такой вид:

$$(A_1A_nB_n)=s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_n)+s(\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_n)+\ldots+s(\boldsymbol{a}_{n-1},\ \boldsymbol{a}_n). \quad (4)$$

§ 4. Формула для вычисления площади ориентированного многоугольника

Для простоты изложения начнем с вывода [1]) этой формулы для ориентированного шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, введя для краткости обозначения

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_1,\quad \overrightarrow{A_2A_3}=\boldsymbol{a}_2,\quad \overrightarrow{A_3A_4}=\boldsymbol{a}_3,\quad \overrightarrow{A_4A_5}=\boldsymbol{a}_4,\quad \overrightarrow{A_5A_6}=\boldsymbol{a}_5.$$

Используя формулу (8) из гл. I, стр. 18, имеем:

$$(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)=(A_1A_2A_3)+(A_1A_3A_4)+ \\ +(A_1A_4A_5)+(A_1A_5A_6). \qquad (5)$$

Используем теперь формулу (2), полагая в ней $n=3$ и считая, что точка B_3 есть точка A_4; получим:

$$(A_1A_3A_4)=s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2)+s(\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3). \qquad (6)$$

Вновь используя формулу (2), но полагая в ней теперь $n=4$ и считая, что точка B_4 есть точка A_5, получим:

$$(A_1A_4A_5)=s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_4)+s(\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_4)+s(\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4). \qquad (6')$$

Аналогичным образом получим:

$$(A_1A_5A_6)=s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_5)+s(\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_5)+s(\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_5)+s(\boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5). \qquad (6'')$$

Подставляя значения (6) в (5), получим, изменив порядок слагаемых, окончательную формулу

$$s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5)= \\ =s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2)+s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_3)+s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_4)+s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_5)+ \\ +s(\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)+s(\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_4)+s(\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_5)+ \\ +s(\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4)+s(\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_5)+ \\ +s(\boldsymbol{a}_4,\ \boldsymbol{a}_5).$$

Аналогичные рассуждения можно, конечно, провести для ориентированного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ с любым числом вершин. Вводя обозначения $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}=\boldsymbol{a}_i$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$, получим:

$$(A_1A_2\ldots A_n)=s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \ldots,\ \boldsymbol{a}_{n-1})= \\ =s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2)+s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_3)+s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_4)+\ldots+s(\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_{n-1})+ \\ +s(\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3)+s(\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_4)+\ldots+s(\boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_{n-1})+ \\ +s(\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4)+\ldots+s(\boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_{n-1})+ \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ +s(\boldsymbol{a}_{n-2},\ \boldsymbol{a}_{n-1}). \qquad (7)$$

[1]) Мы снова не приводим чертежа (см. предыдущую сноску).

Эта формула дает возможность вычислить площадь многоугольника, если измерены длины всех его сторон (никаких других расстояний измерять не потребуется) и все его углы [1]). В самом деле, площади

$$s(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2),\ s(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3),\ \ldots,\ s(\boldsymbol{a}_{n-2}, \boldsymbol{a}_{n-1})$$

треугольников, построенных каждый на двух смежных сторонах заданного многоугольника, можно измерить (по правилам, известным из геометрии), так как в каждом из них известны длины двух сторон и угол между ними — он совпадает с соответствующим углом многоугольника.

Для вычисления же площадей остальных треугольников, входящих в правую часть формулы (7), нужно только предварительно вычислить углы, образуемые их сторонами (длины этих сторон известны — это длины сторон многоугольника). Это не составит особого труда, хотя и требует некоторого внимания. Так, например, чтобы измерить площадь $s(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3)$ треугольника PQR (черт. 31), построенного на векторах $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_3$, достаточно предварительно вычислить угол PQR. Несложные геометрические рассуждения покажут, что этот угол равен, если через α и β обозначить углы многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ при вершинах A_2 и A_3,

либо	$360° - (\alpha + \beta)$	(черт. 31, *а*),
либо	$\alpha + \beta$	(черт. 31, *б*),
либо	$\beta - \alpha$	(черт. 31, *в*).

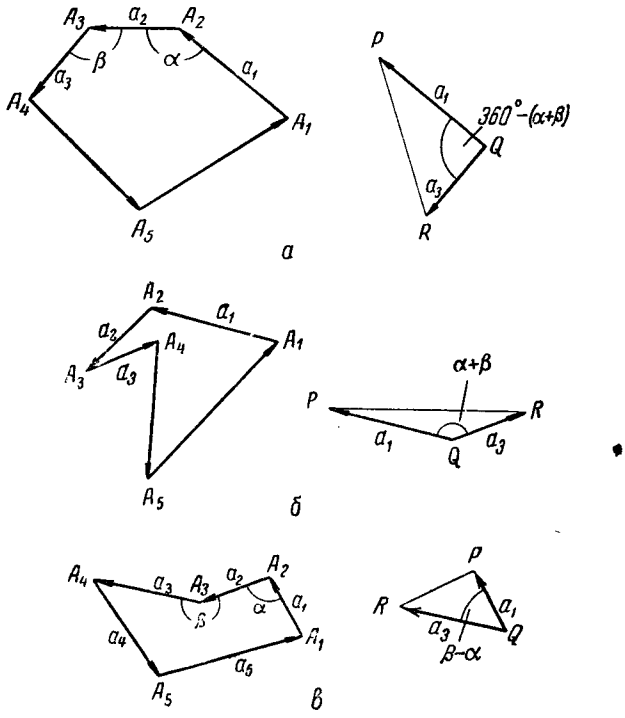
Еще больше возможных случаев возникнет при вычислении угла между сторонами треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_4$, но вычисление и этого угла (равно как и углов во всех остальных треугольниках, входящих в правую часть формулы (7)) представляет только технические трудности.

Все эти трудности исчезают, однако, если воспользоваться понятием ориентированного угла. Оно рассматривается в школьном курсе тригонометрии. Для читателя,

---

[1]) Практическое измерение длины каждой стороны многоугольника, заданного на местности своими вершинами, производится с помощью мерной цепи. Вычисление же углов производится с помощью специального прибора — теодолита. Подробности, касающиеся этих измерений, — в упомянутой выше (стр. 44) книге С. Голицына.

еще не изучавшего тригонометрии, мы изложим это понятие в следующем § 5; там же мы покажем, как оно исполь-



Черт. 31.

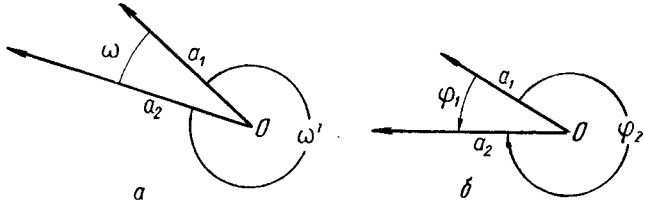
зуется для вычисления угла в треугольнике, построенном на векторах $\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{a}_j$.

§ 5. Вычисление ориентированных углов

Углы, образованные сторонами ориентированного многоугольника, целесообразно, как в этом сейчас убедится читатель, вычислять, учитывая направленность сторон многоугольника, т. е. принимая во внимание, что стороны ориентированного многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ представляют собой векторы

$$\overrightarrow{A_1A_2}, \quad \overrightarrow{A_2A_3}, \quad \overrightarrow{A_3A_4}, \quad \ldots$$

Поэтому, чтобы оценить угол, образованный, например, стороной $\overrightarrow{A_1A_2} = \boldsymbol{a}_1$ со стороной $\overrightarrow{A_2A_3} = \boldsymbol{a}_2$, построим из какой-либо произвольной точки O векторы, равные этим сторонам (черт. 32, *а* и *б*), и повернем вокруг точки O вектор $\boldsymbol{a}_1$ до совпадения его направления с направлением вектора $\boldsymbol{a}_2$. Если этот поворот производится против часовой стрелки (черт. 32, *а*) и угол поворота равен числу ω



Черт. 32.

(положительное число), то ориентированный угол, составленный вектором $\boldsymbol{a}_1$ с вектором $\boldsymbol{a}_2$, считают равным числу ω. Можно, однако, поворачивать вектор $\boldsymbol{a}_1$ не против, а по часовой стрелке (черт. 32, *а*). Этот угол поворота будет, очевидно, равен $\omega' = 360° - \omega$ (положительное число). Ориентированный угол, составленный вектором $\boldsymbol{a}_1$ с вектором $\boldsymbol{a}_2$, считают тогда равным числу $-\omega'$. Таким образом, один и тот же ориентированный угол — его обозначают $(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$ — мы позволяем себе измерять (черт. 32, *б*) либо положительным числом φ_1, равным числу ω, либо отрицательным числом φ_2, равным числу $-\omega' = \omega - 360°$. Легко видеть, что

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 360°.$$

Читатель, вероятно, усомнится в целесообразности сделанного условия: измерять один и тот же угол $(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$ двумя разными числами!? Из дальнейшего изложения выяснится, какую пользу это приносит, но уже теперь обратим внимание на то, что оба эти измерения в некотором смысле «геометрически равноправны».

В самом деле, если по заданному вектору $\boldsymbol{a}_1$ и по углу φ_1 мы захотим построить направление вектора $\boldsymbol{a}_2$ (черт. 32, *б*), то мы повернем, очевидно, вектор $\boldsymbol{a}_1$ против часовой стрелки на угол $\varphi_1 = \omega$; если же мы пожелаем построить направление вектора $\boldsymbol{a}_2$ по заданному вектору $\boldsymbol{a}_1$ и по углу

φ_2, то мы повернем вектор $\boldsymbol{a}_1$ по часовой стрелке на угол $\varphi_2 = \omega - 360°$. В обоих случаях мы придем, очевидно, к одному и тому же окончательному направлению (так как $\varphi_1 = \varphi_2 + 360°$), которое и будет искомым направлением вектора $\boldsymbol{a}_2$.

Вряд ли удивится теперь читатель, если узнает, что ориентированный угол $(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$ принято измерять также и числом $\varphi_1 + 360° \cdot n$ (оно положительно и соответствует повороту против часовой стрелки на угол $\omega + 360° \cdot n$, где n — число полных оборотов), а также и числом $\omega - 360° \cdot m$ (оно отрицательно и соответствует повороту по часовой стрелке на угол $\omega' + 360° \cdot m$, где m — число полных оборотов). Легко понять, что если ψ_1 и ψ_2 — два каких-либо возможных (полученных указанным выше путем) измерения ориентированного угла $(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$, то

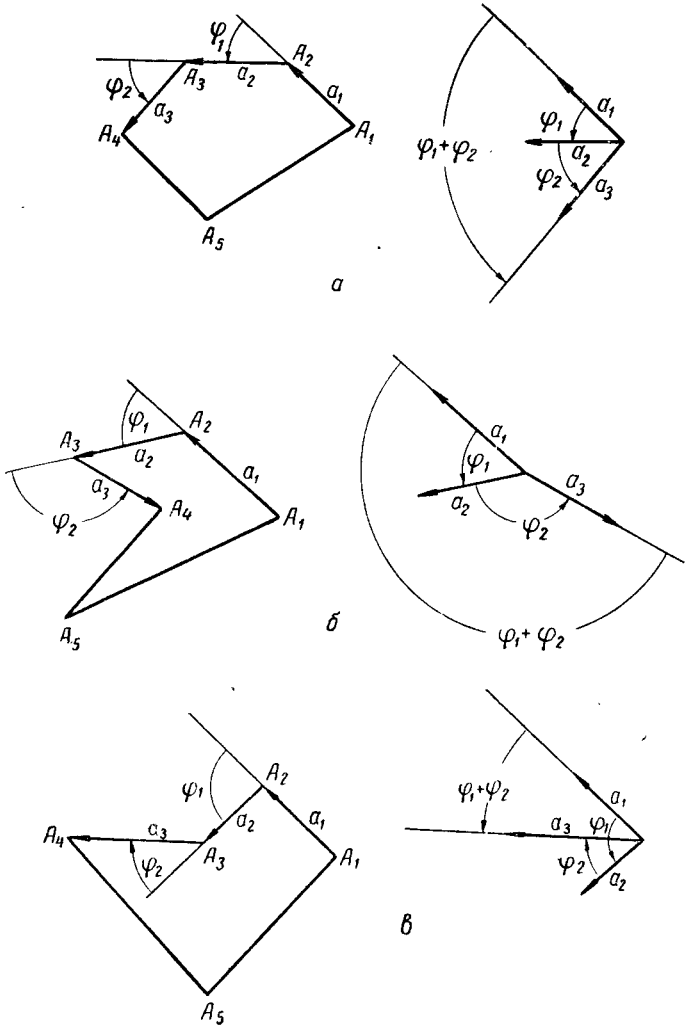
$$\psi_1 - \psi_2 = 360° \cdot k,$$

где k — целое, положительное или отрицательное число.

§ 6. Вычисление углов между несмежными сторонами ориентированного многоугольника

Целесообразность введенного нами способа измерения ориентированного угла, образованного направлениями векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, станет ясной, когда мы приступим к вычислению угла между направлениями двух несмежных сторон многоугольника, например сторон $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_3A_4}$, т. е. между направлениями векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_3$. В самом деле, необходимый для вычисления угла $(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3})$ поворот, совмещающий направление $\boldsymbol{a}_1$ с направлением $\boldsymbol{a}_3$, можно вычислить не сразу, а двумя «этапами» (черт. 33): сначала повернуть вектор $\boldsymbol{a}_1$ до совмещения (по направлению) с вектором $\boldsymbol{a}_2$, т. е. на угол $(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$, а затем повернуть вектор $\boldsymbol{a}_2$ до совмещения с вектором $\boldsymbol{a}_3$ на угол $(\widehat{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3})$. Существенно при этом, что именно в силу принятого нами способа измерения углов (положительным или отрицательным числом) всегда будет иметь место очень полезное — теоретически и практически — соотношение

$$(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) + (\widehat{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3}) = (\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3}). \qquad (8)$$



Черт. 33.

Для полного уяснения справедливости этого правила нахождения угла между двумя несмежными сторонами ориентированного многоугольника читателю следует самостоятельно рассмотреть возникающие возможные случаи взаимного расположения векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$.

Необходимо принять при этом во внимание многозначность символа $(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$ и понимать содержание равенства (8) следующим образом.

Как бы ни были расположены на плоскости три вектора $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, (построенные только для наглядности из одной и той же точки O), число, измеряющее — любым из возможных способов — ориентированный угол между векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$, сложенное с числом, измеряющим — также каким-либо из возможных способов — ориентированный угол между векторами $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{a}_3$, дает число (уже вполне определенное!), которое может служить измерением ориентированного угла между векторами $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_3$.

Возвращаясь теперь к рассмотрению ориентированного многоугольника $A_1A_2\ldots A_n$ и обозначая через φ_1, φ_2, φ_3, ... ориентированные углы между его смежными сторонами:

$$\varphi_1 = (\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}}) = (\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}), \quad \varphi_2 = (\widehat{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3}), \quad \ldots,$$

мы получим следующие формулы для вычисления ориентированных углов между несмежными его сторонами:

$$(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}}) = (\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3}) = \varphi_1 + \varphi_2,$$

$$(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_4A_5}}) = (\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4}) = (\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_3}) + (\widehat{\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4}) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,$$

$$(\widehat{\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_5A_6}}) = (\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_5}) = (\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_4}) + (\widehat{\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{a}_5}) = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4.$$

Аналогичным образом получим:

$$(\widehat{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_4}) = \varphi_2 + \varphi_3, \quad (\widehat{\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_5}) = \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$$

и вообще

$$(\widehat{\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+k}}) = \varphi_i + \varphi_{i+1} + \varphi_{i+2} + \ldots + \varphi_{i+k-1}. \qquad (9)$$

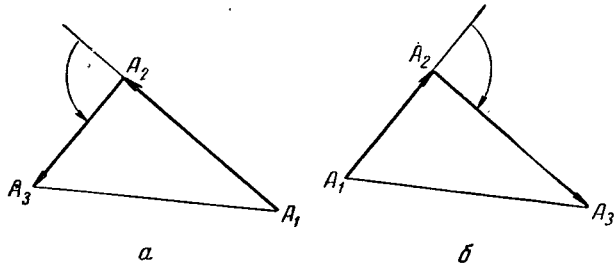
§ 7. Тригонометрическая формула для вычисления площади ориентированного многоугольника

Формула (7) может быть преобразована к виду, более удобному для вычислений, если использовать выражение для площади ориентированного многоугольника, которое мы сейчас выведем.

Хорошо известна в тригонометрии формула для площади S неориентированного треугольника $A_1A_2A_3$:

$$s = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot A_2A_3 \cdot \sin \varphi, \qquad (10)$$

где φ — неориентированный угол при вершине A_2. Обратим внимание на то, что ориентированный угол между направленными сторонами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_2A_3}$ ориентированного треугольника $A_1A_2A_3$ будет положительным (и меньшим, чем 180°), если его ориентация правая (черт. 34, *а*), и что этот



а *б*

Черт. 34.

угол будет отрицательным (и по абсолютной величине меньшим, чем 180°), если ориентация треугольника $A_1A_2A_3$ левая (черт. 34, *б*). Таким образом,

$$\sin \varphi = \sin (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}), \quad \text{если} \quad (A_1A_2A_3) > 0;$$

$$\sin \varphi = -\sin (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}), \quad \text{если} \quad (A_1A_2A_3) < 0.$$

Сопоставляя это с формулой (9), мы придем к тригонометрической формуле для вычисления площади ориентированного треугольника:

$$(A_1A_2A_3) = \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot A_2A_3 \cdot \sin (\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}). \qquad (11)$$

Если ввести для краткости обозначения

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \boldsymbol{a}_1, \quad \overrightarrow{A_2A_3} = \boldsymbol{a}_2$$

и если обозначить, как это принято, длины A_1A_2 и A_2A_3 направленных отрезков $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ через a_1 и a_2, то мы получим:

$$s(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) = \frac{1}{2} a_1 a_2 \sin (\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}). \tag{12}$$

Возвратимся теперь к формуле (7) и подставим в ее правую часть вместо слагаемых $s(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+k})$ их выражение по формуле (12).

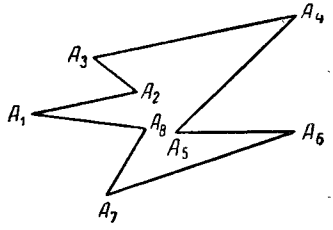
Учитывая, что угол $(\widehat{\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+k}})$ между i-й и $(i+k)$-й стороной ориентированного многоугольника $A_1A_2 \ldots A_n$ определяется по формуле (9)

$$(\widehat{\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_{i+k}}) = \varphi_i + \varphi_{i+1} + \cdots + \varphi_{i+k-1}$$

(в которой, напомним, φ_i есть ориентированный угол при вершине A_i), мы придем к окончательной тригонометрической формуле для вычисления площади ориентированного многоугольника:

$$\begin{aligned} &s(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}) = \\ &= \boldsymbol{a}_1 [a_2 \sin \varphi_1 + a_3 \sin (\varphi_1 + \varphi_2) + \ldots + a_{n-1} \sin (\varphi_1 + \ldots + \varphi_{n-2})] + \\ &+ \boldsymbol{a}_2 [\quad a_3 \sin \varphi_2 \quad + \ldots + a_{n-1} \sin (\varphi_2 + \ldots + \varphi_{n-2})] + \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \\ &+ \boldsymbol{a}_{n-2} [\quad a_{n-1} \sin \varphi_{n-2}]. \end{aligned} \tag{13}$$

Замечание. Напомним, что эта формула получена на основе ранее доказанных теорем, в которых мы тщательно добивались того, чтобы рассуждения, — а следовательно, и результаты — оставались справедливыми при любом расположении заданных точек. Поэтому формула (13) может быть использована для вычисления площади участка, ограниченного многоугольником произвольной формы — даже таким, который изображен на черт. 35. Это обстоятельство практически важно: при измерении площади приходится,



Черт. 35.

таким образом, позаботиться только о вычислении длин сторон многоугольника и ориентированных углов между смежными сторонами; все остальное в многоугольнике не играет никакой роли!

§ 8. Теоретическое использование формулы, выведенной для практических целей

Формула (13) возникла в результате поисков решения практически важной задачи — нахождения целесообразного, экономного по средствам, не требующего излишних измерений на местности способа вычисления площади участка, заданного на местности. Успешное решение этой задачи возникло благодаря тому, что мы применили теоретически важное (и на первый взгляд чрезмерно абстрактное, как будто бы совсем «непрактическое» и даже непринятое в школьной геометрии) понятие ориентированной площади.

В этом частном вопросе проявилось общее положение: абстрактные понятия теоретической науки (которые иной раз представляются неопытному человеку «чрезмерно абстрактными») с большим успехом используются для решения практически важных задач. История науки и в особенности практика современной нам науки неоднократно подтверждали и подтверждают это положение.

Существенно, однако, и другое обстоятельство, также способствующее успехам и достижениям в области науки: решение задач практического характера открывает новые пути для решения теоретических проблем. Мы не будем, конечно, здесь заниматься обоснованием этого положения, но не откажем себе в удовольствии подтвердить его на примере, возникающем из материала этой книжки; мы покажем, что практическая формула (13) может быть с успехом использована для вывода интересного тригонометрического соотношения, установление которого без помощи формулы (13) представляется, как нам кажется, затруднительным.

Займемся вычислением площади s правильного n-угольника, вписанного в окружность единичного радиуса. Эта задача легко решается средствами элементарной геометрии и тригонометрии:

$$s = n \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}. \qquad (14)$$

Применим же теперь к решению этой задачи «практическую формулу» (13). Обозначив через a длину стороны нашего многоугольника и учитывая, что все ориентированные углы между его смежными сторонами равны между собой $\left(\text{каждый из них равен } \omega = \frac{360^\circ}{n}\right)$, мы получим:

$$\begin{aligned} s = \sin\omega &+ \sin 2\omega + \sin 3\omega + \ldots + \sin(n-2)\omega + \\ + \sin\omega &+ \sin 2\omega + \ldots + \sin(n-3)\omega + \\ + \sin\omega &+ \ldots + \sin(n-4)\omega + \\ &+ \ldots\ldots\ldots + \\ &+ \sin\omega. \end{aligned} \tag{15}$$

Учитывая, что, как известно,

$$a = 2\sin\frac{\omega}{2},$$

и подставляя в (15) вместо s его выражение (14), получим после очевидных преобразований:

$$\begin{aligned} \sin(n-2)\omega + 2\sin(n-3)\omega + \ldots + (n-3)\sin 2\omega + \\ + (n-2)\sin\omega = \frac{n}{4}\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}, \quad \omega = \frac{360^\circ}{n}. \end{aligned} \tag{16}$$

Сумеет ли читатель доказать это тригонометрическое тождество, не используя понятия ориентированной площади?

Лопшиц Абрам Миронович.
Вычисление площадей ориентированных фигур.

Редактор *А. П. Разумовская.*

Техн. редактор *С. Н. Ахламов.*
Корректор *Г. Г. Желтова.*

Сдано в набор 28/XII 1955 г. Подписано к печати 24/II 1956 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 1,87. Условн. печ. л. 3,07. Уч.-изд. л. 2,94. Тираж 40 000 экз. Т-02419. Цена 90 к. Заказ № 892.

Государственное издательство
технико-теоретической литературы.
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

Министерство культуры СССР. Главное
управление полиграфической промышленности.
4-я типография им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

Цена 90 к.

31. 1. 1961 р. ціна
карб. 05 коп.

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.
Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.
Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.
Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.
Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.
Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.
Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.
Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболические функции.
Вып. 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование?
Вып. 18. **Г. М. Миракьян.** Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.
Вып. 20. **А. М. Лопшиц.** Вычисление площадей ориентированных фигур.